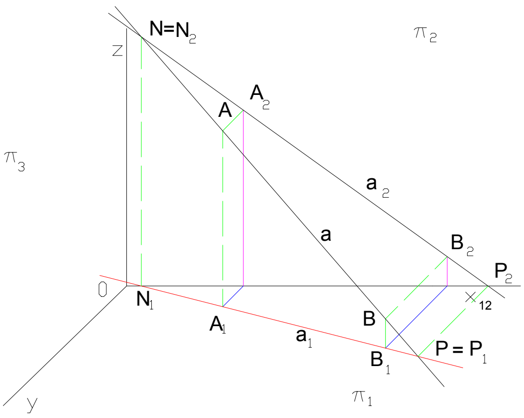
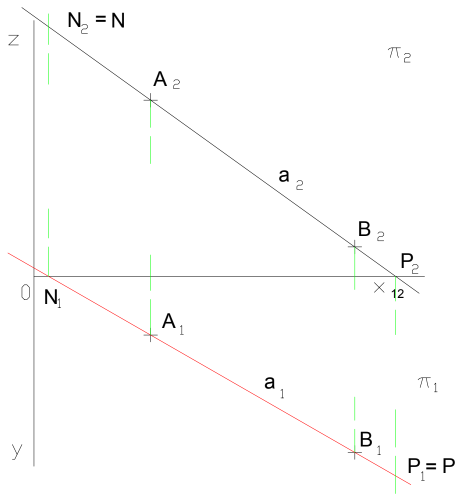
Střední průmyslová škola elektrotechnická
a Vyšší odborná škola
Pardubice, Karla IV. 13

Deskriptivní geometrie I.

Ing. Rudolf Rožec





Pardubice **2002**

Skripta jsou určena pro předmět deskriptivní geometrie II. ročníku technického lycea jako doplněk k výkladu a pro opakování probrané látky. Obsahuje Mongeovo promítání v rozsahu osnovy předmětu a je proto možné jejich využití na všech školách se zavedeným technickým lyceem. Budou též dobrou pomůckou pro zopakování deskriptivní geometrie u žáků, kteří mají maturitní zkoušku z technické grafiky.

Recenze: Mgr. Pavel Vohradník

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

Úvod – způsob učení a význam deskriptivní geometrie

Deskriptivní geometrie - dále DG - se zabývá rovinným zobrazením prostorových útvarů. Historicky se DG v současné formě začala vytvářet až v druhé polovině 18. století. Rovinné zobrazení je vždy náročné na prostorovou představivost. U člověka se tato představivost začíná rozvíjet asi v patnácti letech. Každý člověk je ale jiný a každý má jiné schopnosti učení a chápání. Jakým způsobem bychom se měli tomuto předmětu učit:

- Nejoptimálnější způsob učení je důkladně znát základní pojmy, s kterými se pracuje, a **představit** si to, co mám vytvářet. Skripta jsou tímto způsobem napsána, a proto vedle zobrazení v Mongeově promítání jsou nakresleny názorné obrázky, z kterých vidíte prováděnou konstrukci názorně. Kdo si takto dokáže vycvičit představivost, pro toho není DG problém a bude z něho dobrý technik, který dokáže navrhovat nové výrobky.
- Druhý možný způsob je pracovat na základě dobré znalosti základních pojmů matematickou metodou se znalostí cíle, ke kterému se chci dostat. Je nutná dobrá znalost základních úloh a jejich postupného využívání. Technik tohoto typu ale dokáže pouze dobře reprodukovat to, co se již používá.
- Zcela **chybný způsob je učit se obrázkům**, jak jsou nakresleny ve skriptech, nebo jak si je při hodinách nakreslíte do sešitu. Kdo takto myslí a naučí se jednat, nebude dobrým technikem a v životě bude mít značné problémy, **protože se naučí řešit úkoly pouze intuicí, která je mnohdy chybná**.

Toto je pouze obecný přehled, ale v praxi to tak je. Protože chcete býti techniky, tak si musíte vždy představit, jak konstrukce, kterou navrhujete, bude vypadat a jak se bude v určitém prostředí chovat. Technik by měl preferovat nejjednodušší řešení, nejpřehlednější a nejpřesnější – nejracionálnější. Výuka tohoto předmětu proto celkově představivost cvičí a rozvíjí, což je důležité pro každého člověka. I ten musí mít určitou představivost.

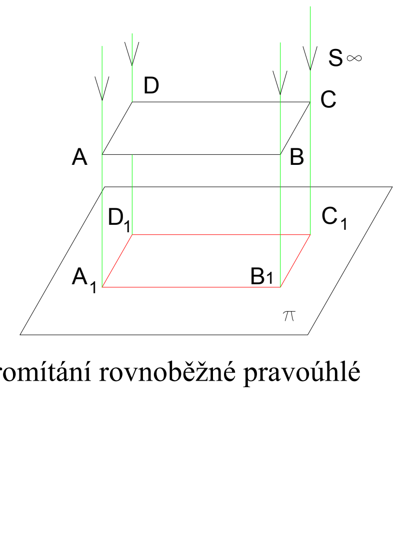
Deskriptivní geometrie také umožňuje rozvíjení životní filozofie. Ke správnému řešení úloh v DG vede vždy **několik** řešení a ten, který je řeší, by se měl chovat efektivně. Tak je to i v normálním životě, **vždy můžete vše řešit různými způsoby a metodami, ale měli byste si představit, k čemu to povede**.

Deskriptivní geometrie proto rozvíjí duševní schopnosti nejen technika, ale i každého člověka, ať už se zabývá jakoukoliv činností.

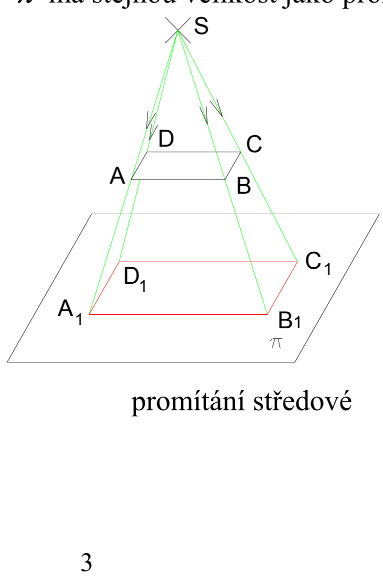
1 Způsoby zobrazení - princip promítání

Promítání si můžeme představit jako pohled na nějaký předmět - obdélník *ABCD* a jeho zobrazení v promítací rovině π - tabule, papír atd. Naše oko je v tomto případě **střed promítání** *S*. Spojnice oka a jednotlivých bodů obdélníka jsou **promítací paprsky**. Můžeme si představit dva případy:

1. Jsme ve velké vzdálenosti od obdélníka *ABCD*, takže promítací paprsky jsou prakticky rovnoběžné - nebereme-li to zcela matematicky přesně. Takovéto promítání proto nazýváme **promítáním rovnoběžným.** Jestliže jsou paprsky k rovině promítání **kolmé**, tak **promítáním rovnoběžně pravoúhlým**. Průmět $A_1B_1C_1D_1$ do promítací roviny π má stejnou velikost jako promítaný obdélník.



promítání rovnoběžné pravoúhlé



promítání středové

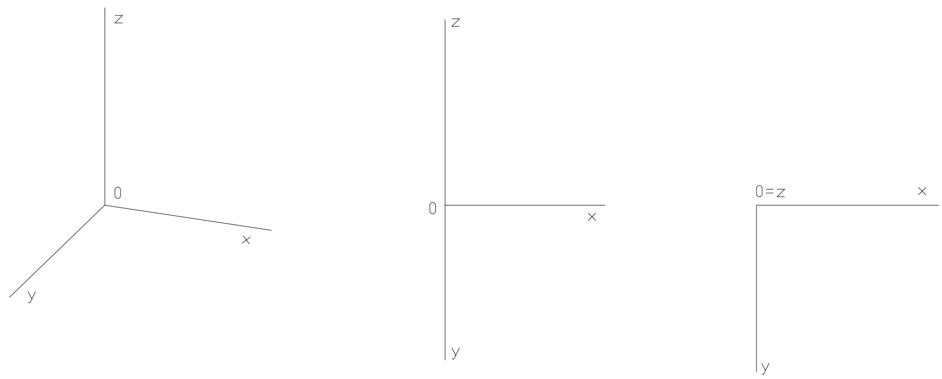
2. Jsme v malé vzdálenosti od obdélníka *ABCD*. Čím je vzdálenost oka - středu *S* - od obdélníka menší, tím průmět obdélníka větší a naopak. Takovéto promítání nazýváme **promítáním středovým**.

Toto si můžete vyzkoušet sami, když si vezmete do ruky sešit a promítnete si jeho obraz např. do roviny stěny, před kterou sedíte.

V technice se uplatňuje především rovnoběžné promítání, které je základem technického kreslení. Promítání středové se uplatňuje v architektuře, kde kreslíme zobrazení objektů tak, jak je ve skutečnosti vidíme.

1.1 Souřadnicové systémy rovnoběžného pravoúhlého promítání

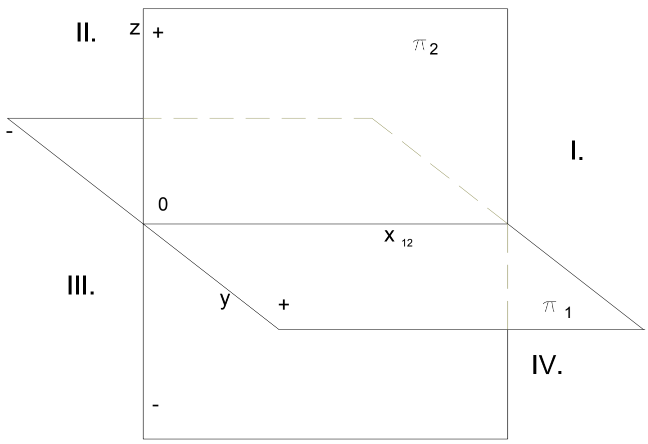
Chceme-li zobrazit předmět určitých rozměrů, musíme použít souřadnicový systém. Pro zobrazování používáme podle způsobu zobrazení tři pravoúhlé souřadnicové systémy:



axonometrické promítání Mongeovo promítání kótované promítání

1. Souřadnicový systém pro názorné promítání, který využívá tři průmětny – **axonometrické promítání**. Je to obecně postavený pravoúhlý souřadnicový systém, který používáme pro názorné zobrazení těles.
2. Souřadnicový systém pro promítání na dvě průmětny – **Mongeovo promítání**. Toto promítání je základem pro technické kreslení součástí ve strojírenství a pro stavební kreslení.
3. Souřadnicový systém pro promítání na jednu průmětnu – **kótované promítání**. Kótované promítání odpovídá kreslení na počítači ve 2D, kdy kreslíme tělesa v ploše a jeden průmět.

V DG, kterou se budeme zabývat, budeme používat především Mongeovo promítání. Je poměrně jednoduché a důležité pro využití v technickém kreslení. Axonometrické promítání bude použito pro názorné zobrazení některých prvků. S axonometrickým promítáním se seznámíte ve skriptech Deskriptivní geometrie II. Nejméně přehledné, ale pro počítačové kreslení důležité kótované promítání se probírá až na vysokých školách.

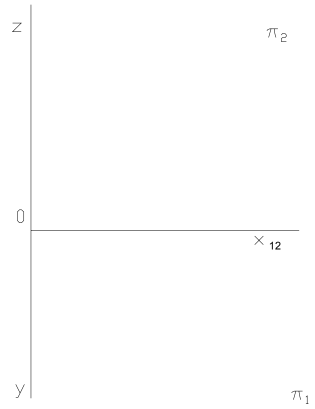


Orientace v pravoúhlém souřadnicovém systému při promítání na dvě průmětny:
Půdorysna π_1 – **prvá průmětna** a **nárysna** π_2 - **druhá průmětna** dělí prostor na čtyři kvadranty.

Souřadnice v jednotlivých kvadrantech:

Kvadrant osy:	y	z
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

K znázornění jsme použili axonometrický souřadnicový systém. Jestliže sklopíme π_1 do roviny π_2 (při kreslení na papír nebo na tabuli), dostaneme souřadnicový systém Mongeova promítání.

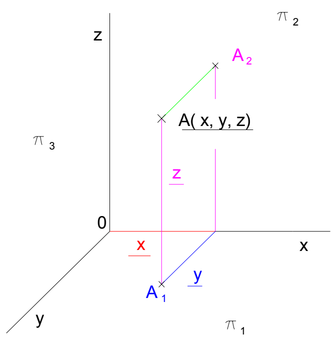


V tomto systému si už musíme dokázat představit jednotlivé kvadranty a osy. Začneme s kvadranty.
Zobrazen je prvý kvadrant – osy *y* a *z* jsou kladné. Osu *x* označujeme jako x_{12} – je to průsečnice prvé a druhé průmětny.
Osy *z* a *y* jsou totožné a popisujeme jejich kladnou část. Nesmíme ale zapomenout, že od počátku *0* se smysl os mění, jestliže máme nějaký prvek v jiném kvadrantu, než prvém.
Úkol:
Určete, jak budou rozloženy průměty Mongeova promítání, když budete zobrazovat těleso ležící v druhém, třetím a čtvrtém kvadrantu.

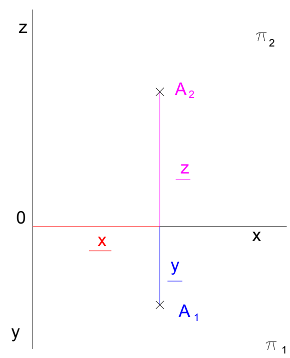
2 Mongeovo promítání

2.1 Zobrazení bodu

Zobrazení bodu je první úloha, na které si můžete ověřit, zda jste si vytvořili správnou představu o vzniku souřadnicového systému Mongeova promítání. Chceme-li zobrazit bod, musíme mít zadané souřadnice bodu. Zadáme obecné souřadnice bodu *A*(x, y, z). Číselně udáváme hodnoty souřadnic zpravidla v cm. Provedeme zobrazení bodu *A* v názorném zobrazení a v Mongeově promítání:



Názorné zobrazení



Mongeovo promítání

Názorné zobrazení:

Bod *A* leží v prvém kvadrantu – souřadnice jsou kladné. Jednotlivé souřadnice bodu vynášíme ve směru os postupně – x, y, z. Tak zobrazíme v názorném promítání bod *A*. V prvé průmětně π_1 při tomto vynášení dostaneme prvý průmět bodu *A* - A_1. Jestliže vedeme z bodu *A* promítací paprsek kolmý k druhé průmětně π_2, dostaneme druhý průmět bodu *A* - A_2.

Mongeovo promítání:

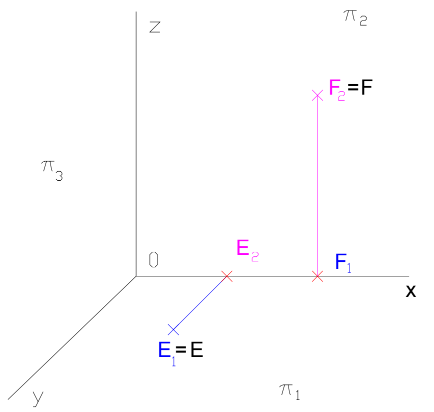
Prvou průmětnu π_1 jsme otočili o 90°. Tím jsme převedli π_1 a π_2 do jedné roviny. Vynášíme souřadnice x, y, z. Zobrazíme prvý průmět bodu $A - A_1$ a druhý průmět bodu $A - A_2$**. V Mongeově promítání se nezobrazí skutečný bod *A*.**

Definice: Spojnice A_1 a A_2 je kolmá k ose x (základnici) a nazývá se **ordinála.**

Úloha: Zobrazte body *B*(2, -3, 5), *C*(6, 4, -3) , *D*(4, -5, -2)

Rozbor: Uvědomte si z předchozího, v kterých kvadrantech body leží. Nakreslete si názorný souřadnicový systém a body zobrazte též v názorném souřadnicovém systému. Porovnejte názorné promítání s Mongeovým.

Body ležící v některé z průměten:



Jestliže bod $E(3, 5, 0)$ leží v první průmětně, leží jeho druhý průmět na ose x (základnici). Obdobně bod $F(6, 0, 3)$, který leží v druhé průmětně, má prvý průmět na základnici.

Úloha:

Zobrazte body v Mongeově promítání a porovnejte s názorným zobrazením.

2.2 Zobrazení přímky

Ze stereometrie víte, že přímku určují dva body. Můžeme ji ale též určit bodem a směrem (např. přímka rovnoběžná s jinou přímkou nebo kolmá k některé rovině). Zobrazíme přímky, které jsou zadány dvěma body. Zobrazení provedeme pro:

- obecnou polohu přímek
- zvláštní polohu přímek

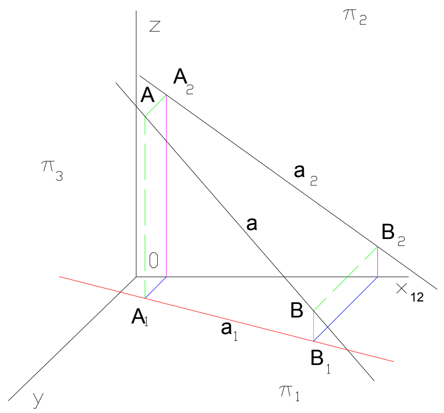
Bod na přímce – věta o incidenci (poloze)

Jestliže bod leží na přímce, průměty bodu leží na průmětech přímky.

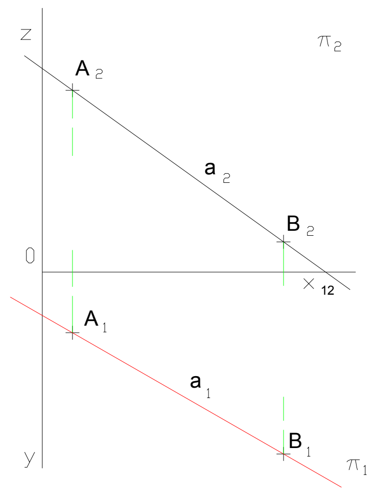
Obecná poloha přímky:

Zobrazte přímku *a*, která je zadána body $A(1, 2, 6)$ a $B(6, 6, 1)$. Způsob zobrazení je velmi jednoduchý – zobrazíme oba body a průměty bodů vedeme přímku.

Způsob kreslení, který budeme používat i nadále, se bude trochu lišit od způsobu, který byl používán při zobrazování bodů. V Mongeově promítání budeme ordinálu kreslit zelenou čárkovanou čarou, která bude mezi průměty bodu přerušená. V názorném promítání budeme opět souřadnice bodu kreslit barevně – y modře, z fialově a z průmětů bodů budou vedeny promítací paprsky zelenou čárkovanou čarou do skutečného bodu. Prvé průměty budou barevně odlišeny od druhého průmětu červeně. Barvy může ale využít pouze ten, který bude pracovat s počítačovou kopií, nebo si vytiskne skripta na barevné tiskárně.



Názorný průmět přímky *a*

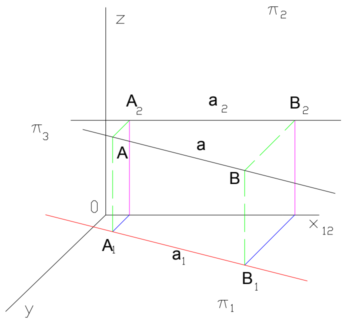


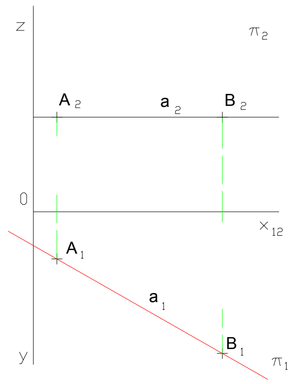
Průmět přímky *a* v Mongeově promítání.

Zvláštní polohy přímek vzhledem k souřadnicovému systému

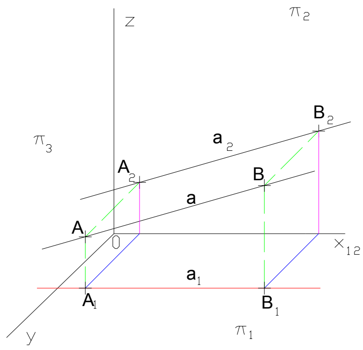
Poznámka – doporučení: vytvořte si ze sešitu názorný souřadnicový kout a polohu přímky si namodelujte.

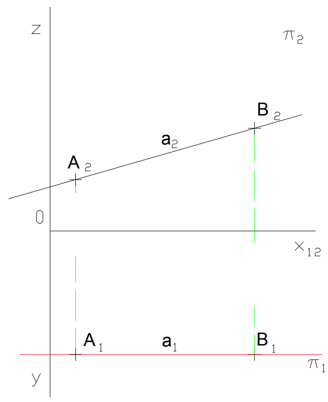
1. Přímka rovnoběžná s průmětnou





Přímka rovnoběžná s první průmětnou π_1 prochází body ve stejné výšce nad průmětnou, a proto a_2 se promítá jako přímka rovnoběžná s osou x_{12}.



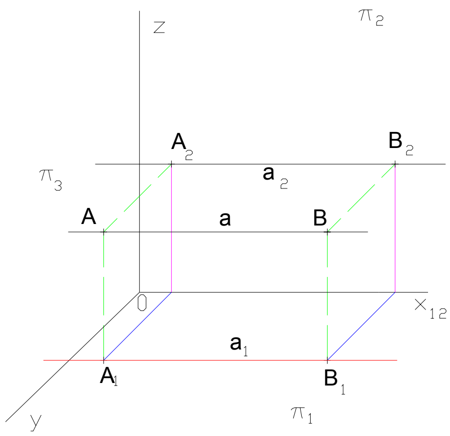


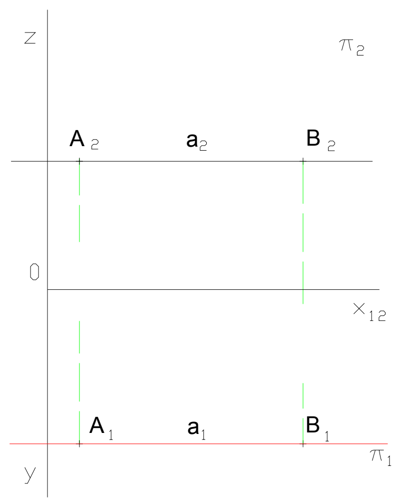
Přímka rovnoběžná s druhou průmětnou - π_2.

Přímka prochází body ve stejné vzdálenosti od π_2, a proto prvý průmět – a_1 je rovnoběžný s osou x_{12}.

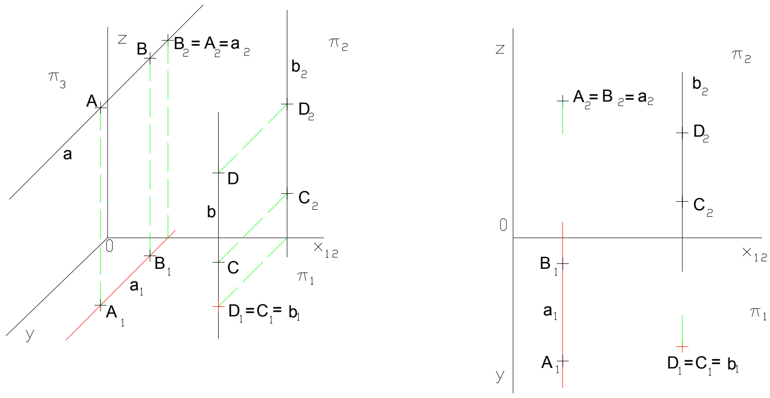
2. Přímka rovnoběžná s osou x_{12}

Jestliže je přímka rovnoběžná s osou x_{12}, pak průměty jsou též rovnoběžné s osou x_{12}. Přímka je kolmá k π_3.





3. Přímka kolmá k průmětně



Přímka, která je kolmá k průmětně, musí být rovnoběžná s osou y nebo z a do příslušné průmětny se promítá jako bod. Zbývající průmět této přímky je přímka kolmá k ose x_{12}.

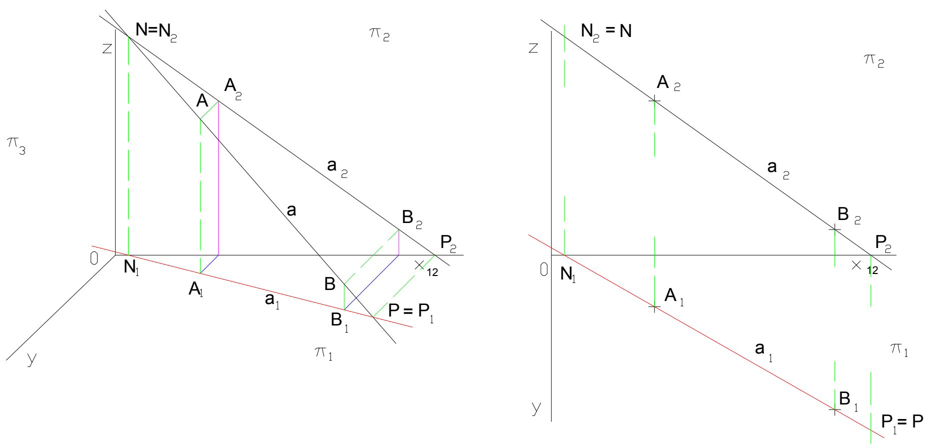
2.3 Stopníky přímky

Definice: Stopník je bod, v kterém přímka protíná průmětnu.

Protože přímka může protínat dvě průmětny – půdorysnu a nárysnu, máme **půdorysný stopník** – *P* a **nárysný stopník** – *N*. Označení písmeny *P* a *N* je standardní a tato písmena nesmí být použita pro označení jiných bodů. K odlišení stopníků různých přímek použijeme index, který označuje přímku – např. P^a, N^b atd. Jestliže máme stopníky pouze jedné přímky, index se neuvádí.

Půdorysný stopník *P* leží v prvé průmětně, jeho souřadnice z = 0 – druhý průmět tohoto stopníku P_2 leží na ose x_{12}. Nárysný stopník *N* leží v nárysně, proto jeho souřadnice y = 0 – prvý průmět N_1 leží na ose x_{12}. Lépe je ale vycházet z představy, než konstruovat stopníky mechanicky.

Znázornění stopníků:



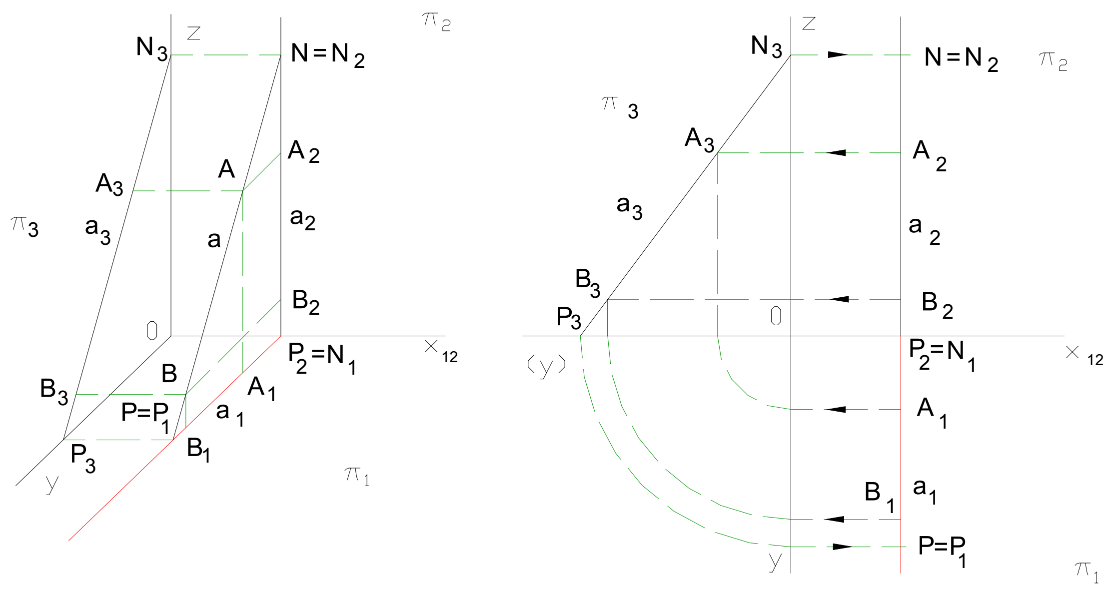
Příklad : Sestrojte stopníky přímky $a = AB$. $A(4, 2, 6)$, $B(11, 6, 1)$

Rozbor:

V názorném zobrazení vidíme oba stopníky *P* a *N*. Vrátíme se do Mongeova promítání. Kde přímka protíná půdorysnu? Vidíme v druhém průmětu – v místě, kde a_2 protíná osu x_{12}. Tam je půdorysný stopník P_2. Pomocí ordinály zkonstruujeme P_1. Obdobná je i konstrukce nárysného stopníku. Opět se musíme zamyslet nad tím, kde vidíme průsečík přímky a nárysny. Ten vidíme v prvém průmětu, kde a_1 protíná základnici x_{12}. Pomocí ordinály sestrojíme N_2. Z charakteru Mongeova promítání si musíme též uvědomit, že **body v průmětnách** nejsou jen průměty, ale **jsou skutečné body.** Že tomu tak je, vidíte v názorném zobrazení. Uvědomte si, že půdorysný průmět Mongeova promítání vznikl sklopením půdorysny názorného promítání. Nárysna zůstala stejná.

Příklad:
Sestrojte stopníky přímky $a = AB$. $A(3, 2, 5)$, $B(3, 5, 1)$

Rozbor:
Přímka je rovnoběžná s π_3 – bokorysnou a v Mongeově promítání $a_1 = a_2$. Zobrazení neurčuje, jaká je poloha přímky. Aby bylo možné určit, jakou má přímka polohu, můžeme zobrazit přímku v π_3 – bokorysně. Zde můžeme také určit nárysný a půdorysný stopník.



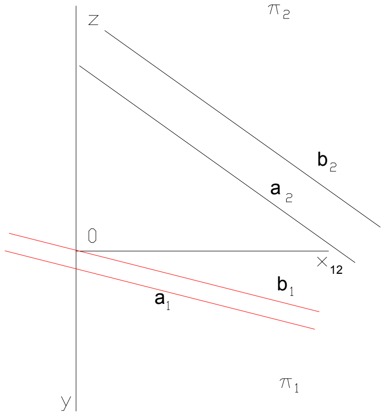
Řešení:

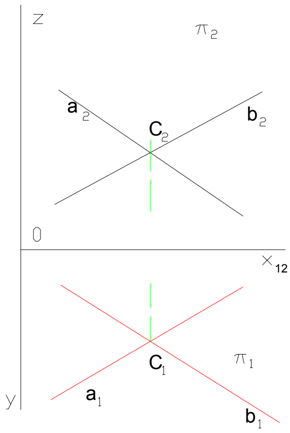
V Mongeově promítání zobrazíme body *A, B* a přímku *a*. V názorném promítání vidíme zobrazení třetího průmětu v π_3. V Mongeově promítání musíme provést promítnutí (naznačeno šipkami) a otočení (naznačeno obloukem). V názorném promítání vidíme třetí průmět přímo a otočení průměten jsme již v předchozím prováděli. Získáme třetí průmět přímky – a_3. V třetím průmětu určíme nárysný i půdorysný stopník. Stopníky zpětně převedeme do prvého a druhého průmětu.

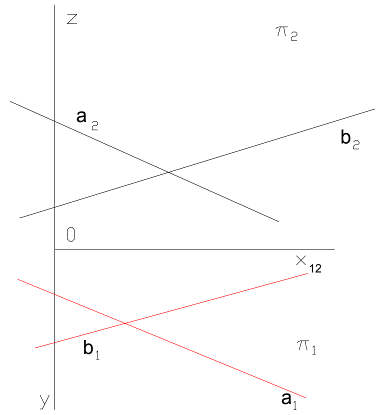
Pozn.
Sestrojení stopníků můžeme provést i dalšími způsoby.
Je možné třetí průmětnu vázat i na prvý průmět. Konstrukce by byla obdobná zobrazené. Výhodou těchto konstrukcí je poměrně dobrá názornost a srozumitelnost.
Otáčení do třetího průmětu bychom ale měli používat přednostně pro univerzálnější použití. Otáčení budeme využívat při pozdějších konstrukcích, kde se používá rovina rovnoběžná s osou x_{12}.
Další možnost je sklopení přímky *a* do prvé a druhé průmětny tak, jak bude probráno v kapitole 2.5 - Skutečná velikost úsečky. Tento způsob je nejméně náročný na prostor zobrazení.

2.4 Vzájemná poloha přímek

Dvě přímky v prostoru mohou být navzájem rovnoběžné, různoběžné nebo mimoběžné. **Přímky rovnoběžné různé a různoběžné určují rovinu**. Zobrazení těchto možností v Mongeově promítání:







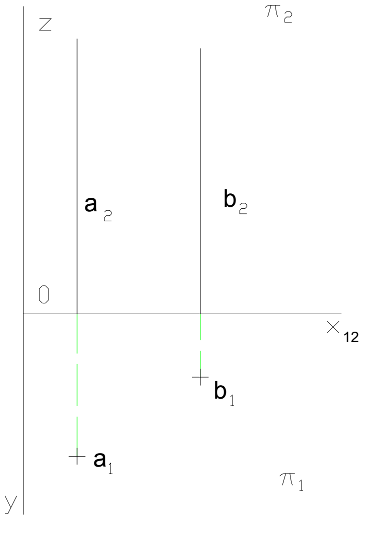
Přímky rovnoběžné Přímky různoběžné Přímky mimoběžné

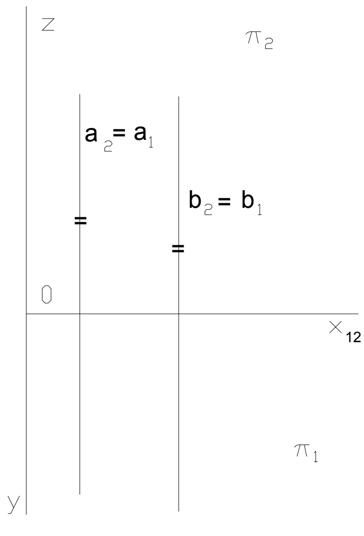
Přímky rovnoběžné – promítají se ve všech průmětech rovnoběžně. Můžete si prakticky vyzkoušet, jestliže si vezmete obdélník (např. učebnici) – ve všech pohledech se hrany obdélníka promítají rovnoběžně.

Přímky různoběžné – mají společný bod – průsečík (v příkladu bod *C*). **Průměty bodu *C* leží na ordinále.**

Přímky mimoběžné – nemají společný bod. **Průměty přímek se protínají pouze zdánlivě** – <u>průsečíky neleží na ordinále</u>.

Zvláštní polohy dvojice přímek



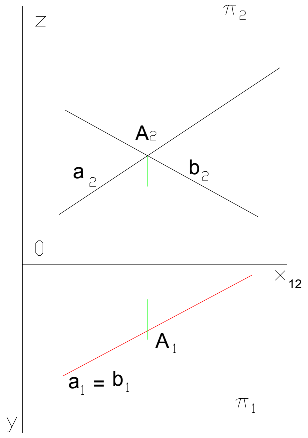


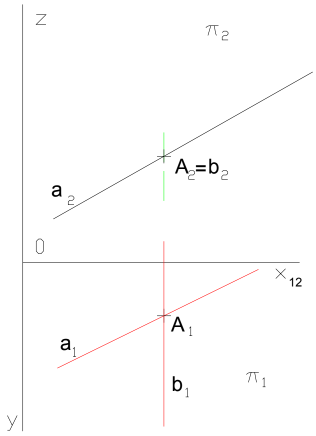
<u>1.Rovnoběžné přímky</u>

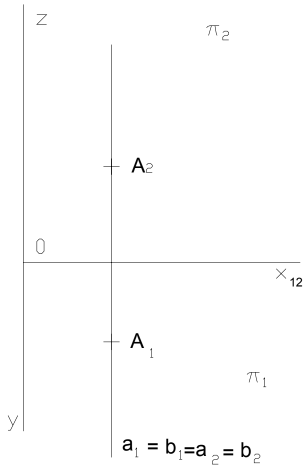
Jedná se:

- o dvě přímky, které jsou kolmé k průmětně. Na obrázku jsou dvě přímky kolmé k π_1. Obdobně by bylo možné vést dvě rovnoběžné přímky kolmé k π_2.
- o dvě přímky, které jsou navzájem rovnoběžné a rovnoběžné s bokorysnou π_3. **Ze zobrazení ve dvou průmětech ale není jednoznačně určená rovnoběžnost – k jednoznačnosti by byl nutný třetí průmět.** Přímky by mohly být (kdyby rovnoběžnost nebyla označena) i mimoběžné. Zkuste namodelovat oba případy.

2.Různoběžné přímky

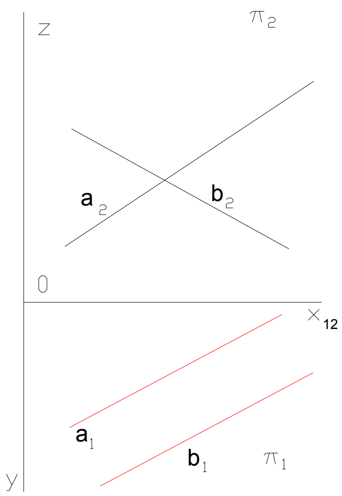


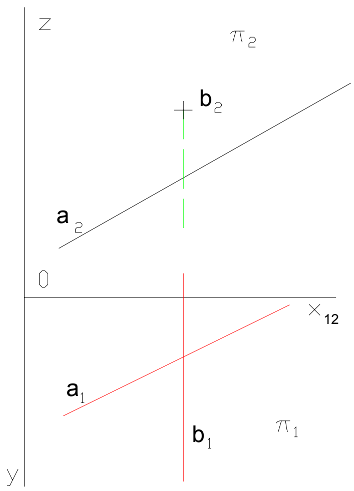




- v prvém případě se jedná o přímky, které leží v tzv. promítací rovině (v které se zde promítají do π_1 jako jedna přímka). Přímky určují rovinu kolmou k prvé průmětně. Obdobně mohou být přímky v poloze, která určuje rovinu kolmou k druhé průmětně – **nakreslete**.
- v druhém případě je *b* kolmá k druhé průmětně a druhý průmět přímky *b* je bod. Přímka *a* má obecnou polohu. Nakreslete si případ, že jedna přímka je kolmá k prvé průmětně a druhá má opět obecnou polohu.
- v třetím případě přímky *a* a *b* jsou rovnoběžné s třetí průmětnou a mají společný bod (průsečík) *A*. **K určení polohy přímek je ale nutný třetí průmět**.

3.Mimoběžné přímky



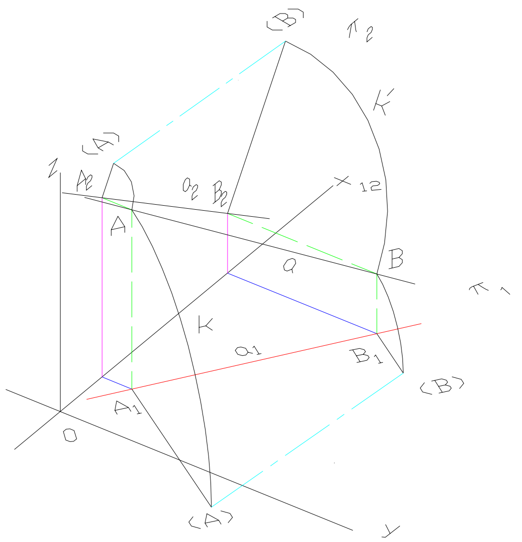


- v prvém případě jsou prvé průměty přímek rovnoběžné. Že jsou ve skutečnosti mimoběžné, vidíme z druhého průmětu.
- v druhém případě přímka *a* má obecnou polohu a přímka *b* je kolmá k druhé průmětně.

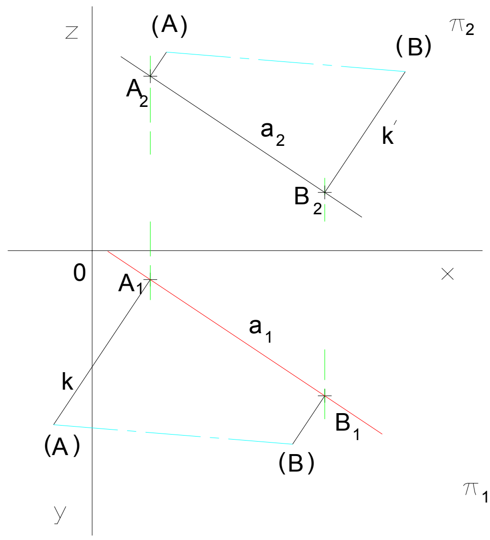
Úkol: Zkonstruujte mimoběžné přímky, o nichž platí, že *a* je kolmá k prvé průmětně a *b* je kolmá k druhé průmětně.

2.5 Skutečná velikost úsečky

Velmi často potřebujeme zjistit skutečnou velikost úsečky. Jak víme z poznatků o promítání, skutečná velikost se zobrazí v Mongeově promítání v průmětnách π_1 nebo π_2. To znamená, že musíme úsečku do průměten sklopit. Nejlépe je vidět toto sklápění na modelu. Dobře je vidět též v názorném promítání.



Sklopení úsečky do průměten v názorném promítání



Sklopení v Mongeově promítání

Při sklápění do π_1 se bod A otáčí po kružnici k. Tato kružnice se v názorném promítání jeví jako elipsa. V pravoúhlém průmětu Mongeova promítání se jeví jako přímka k, kolmá k A_1B_1. Při sklápění do π_1 je poloměr kružnice k souřadnice z bodu A (můžeme říci i jinak – výška bodu A nad π_1). Obdobně se sklápí do prvé průmětny i bod B. Skutečná délka úsečky $|AB|$ je zobrazená $|(A)(B)|$. Sklápět můžeme i v obráceném směru, než je provedeno. Směr sklápění závisí na volném prostoru.

Při sklápění do π_2 se bod B otáčí po kružnici $k´$. Tato kružnice se opět jeví jako přímka $k´$, která je kolmá k průmětu úsečky A_2B_2. Poloměr kružnice $k´$ je souřadnice y bodu B (opět možno říci jinak – vzdálenost bodu B od π_2. Skutečná délka úsečky $|AB|$ je zobrazená jako $|(A)(B)|$.

Do které průmětny sklápíme, závisí opět na možnostech plochy v souřadnicovém systému.

2.6 Zobrazení rovin

Ze stereometrie víme, že rovina je určena:

1. Pomocí třech různých bodů, které neleží na jedné přímce.
2. Pomocí přímky a bodu, který na dané přímce neleží.
3. Pomocí dvou přímek – rovnoběžných různých nebo různoběžných.

Dále je nutné zopakovat věty o incidenci – poloze:

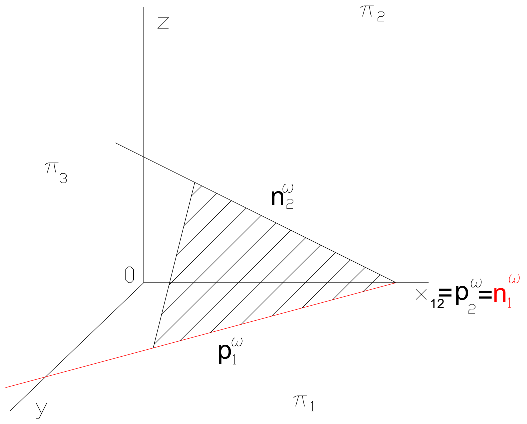
1. Přímka leží v rovině právě tehdy, prochází-li dvěma různými body roviny.
2. Bod leží v rovině, leží-li na přímce roviny.
3. Leží-li bod v rovině, pak průmět bodu je bodem průmětu roviny.

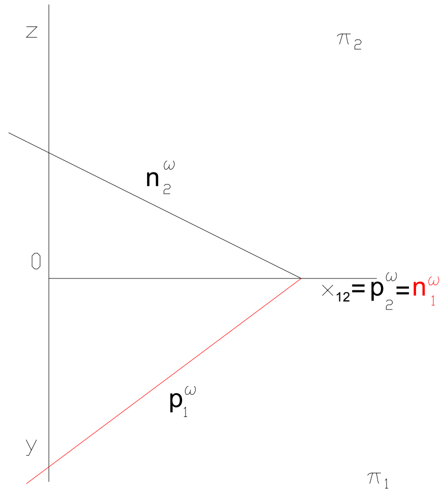
Rovinu můžeme zobrazit způsoby určení. Obvykle ale volíme zobrazení pomocí dvou různoběžných přímek, kterým říkáme **stopy**.

Definice: Stopa je průsečnice roviny a průmětny.

Stopa je opět půdorysná - označujeme p a nárysná – označujeme n. Index označuje rovinu.

Označení *p* a *n* nesmíme použít pro jiné přímky.



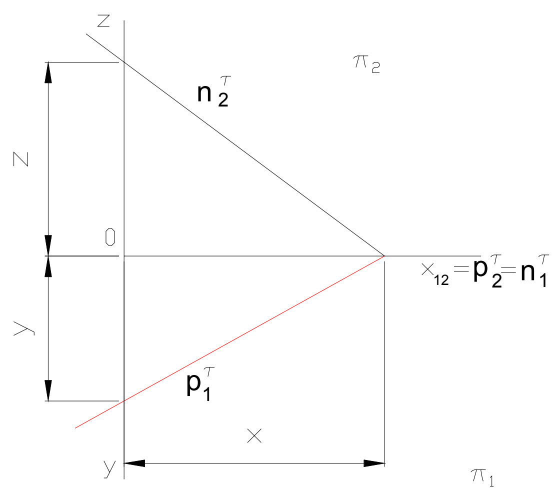


Zobrazení roviny pomocí stop

Rovina ω.je zobrazena názorně a v Mongeově promítání.

V názorném zobrazení vidíme část roviny v prvém kvadrantu. Rovina je pro názornost vyšrafována. Rovina je ale nekonečná, proto stopy, jako přímky, pokračují za rovinu třetí průmětny – bokorysny. Jejich pokračování by mohlo být i směrem doprava.

V Mongeově promítání je rovina znázorněná pouze průměty stop – dvěma různoběžnými přímkami. Stopy leží v průmětnách, a proto chybějící průměty stop leží na ose x_{12} a nárysná stopa s půdorysnou se na ni protínají.



Sestrojení stop roviny zadané pomocí souřadnic:

Stopy roviny zadáváme pomocí úseků na osách – viz. obrázek. Zadání je formálně obdobné jako zadání bodu - τ(x, y, z). Souřadnice roviny mohou být zadány i záporně.

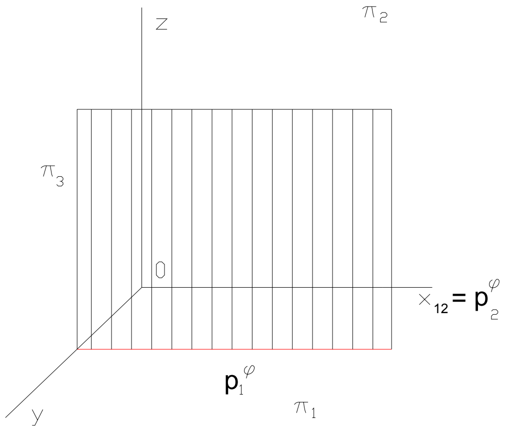
Zadání roviny je možné provést i jiným způsobem, viz. určení. Zadání pomocí souřadnic a zobrazení pomocí stop je způsob nejjednodušší a nejčastější.

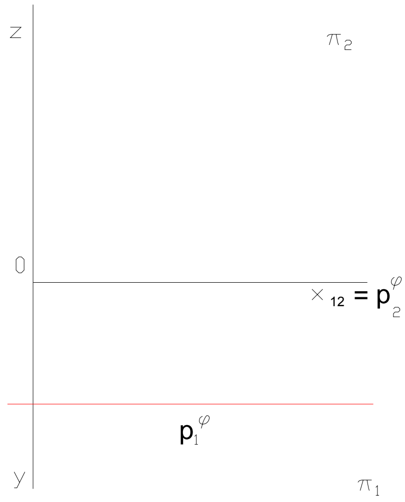
Zvláštní polohy rovin

Budou uvedeny pouze zvláštní polohy k první průmětně. Obdobná poloha by mohla být i k průmětně druhé. Při studiu si zkuste provést namodelování.

- **Rovina rovnoběžná s nárysnou**

Sestrojte rovinu φ rovnoběžnou s druhou průmětnou.
Rovina má pouze půdorysnou stopu, protože s druhou průmětnou se protíná v ∞.
Rovina je zároveň kolmá k půdorysně.



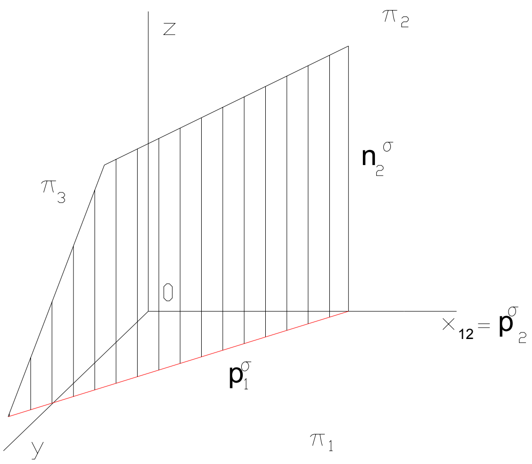


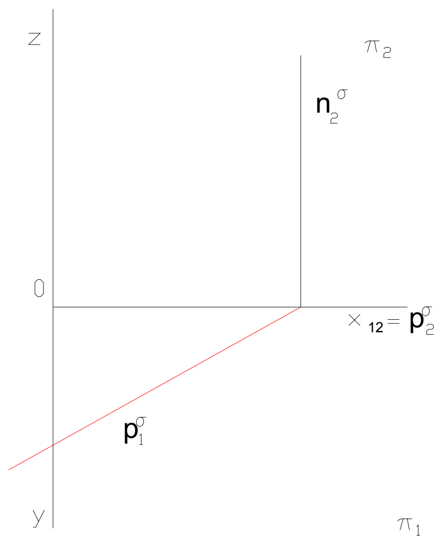
Úkol:
Namodelujte si rovinu rovnoběžnou s půdorysnou a nakreslete stopu.

- **Rovina kolmá k půdorysně**

Sestrojte rovinu σ kolmou k půdorysně, která není rovnoběžná s druhou průmětnou.

Ze stereometrie víme, že rovina kolmá k druhé rovině musí obsahovat přímku kolmou k druhé rovině. Tato přímka je nárysná stopa (nebo přímka s ní rovnoběžná). V Mongeově promítání je kolmá k ose x_{12}.

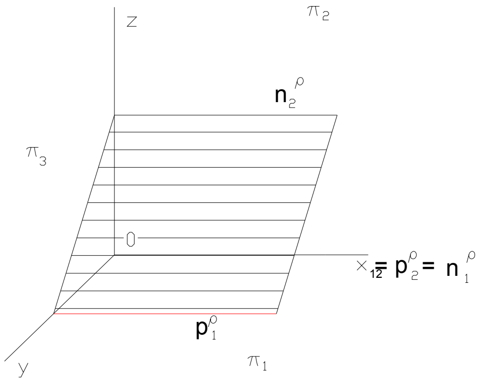


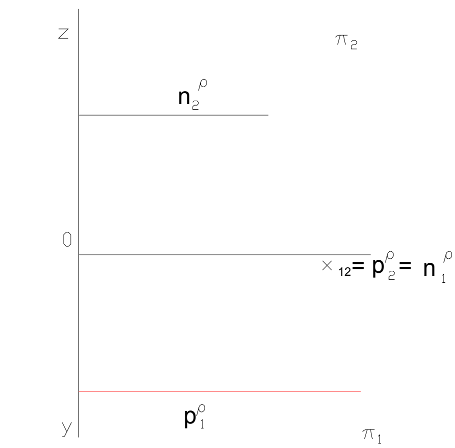


Úkol:
Namodelujte rovinu kolmou k druhé průmětně a nakreslete stopy

- **Rovina rovnoběžná s osou x**

Sestrojte rovinu rovnoběžnou se základnicí, která **není** rovnoběžná s průmětnou. Stopy roviny budou rovnoběžné se základnicí.





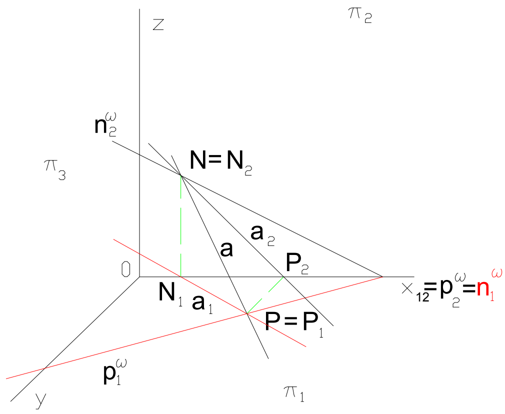
2.7 Přímka v rovině

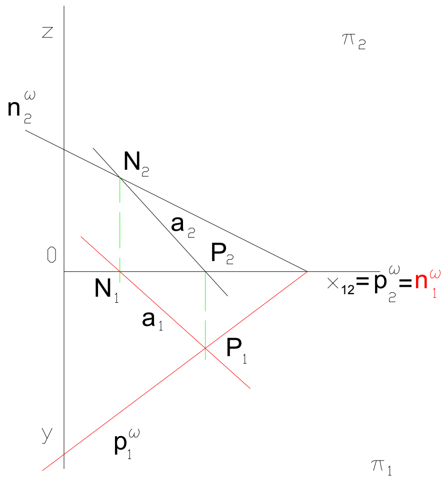
Přímka v obecné poloze

Ze stereometrie víme, že přímka ležící v rovině prochází dvěma body roviny. U přímky nás zajímají stopníky, které musí ležet v rovině a potom tedy platí -

Definice: Přímka v rovině má stopníky na stopách roviny.

Zobrazení obecné přímky *a* v rovině:





Půdorysný stopník *P* přímky *a* leží v prvém průmětu na p_1^{ω}, druhý průmět - P_2 na ose x_{12}.

Obdobně nárysný stopník *N* v druhém průmětu leží na n_2^{ω}, prvý průmět – N_1 na ose x_{12}.

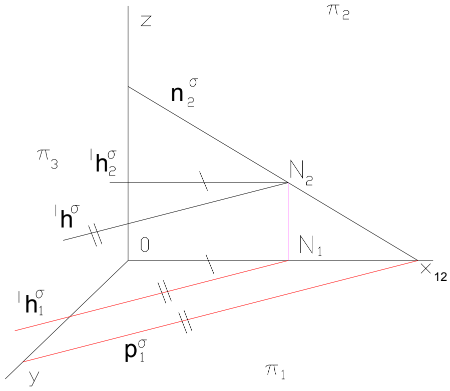
Hlavní přímka

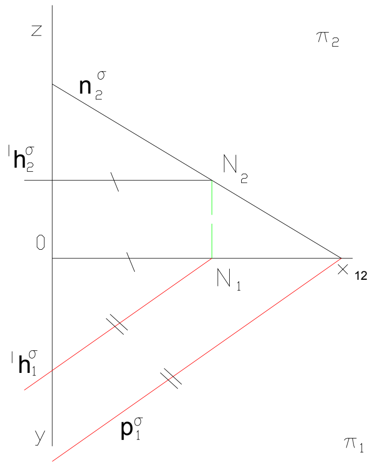
Definice: Hlavní přímka je přímka rovnoběžná s jednou stopou roviny a leží v rovině.

Z definice plyne, že hlavní přímka může být rovnoběžná buď s půdorysnou nebo nárysnou stopou. Hlavní přímky jsou tedy:

- rovnoběžné s půdorysnou stopou - přímky I. osnovy.
- rovnoběžné s nárysnou stopou - přímky II. osnovy.

Hlavní přímky se značí písmenem *h* s indexy osnovy, průmětu a označení roviny příklad - ${}^{I}h_1^{\omega}$. Jedná se o hlavní přímku roviny *ω*, první osnovy, první průmět. Písmeno *h* se nesmí použít pro označení jiných přímek.





V názorném a Mongeově promítání je zobrazena hlavní přímka první osnovy roviny σ.

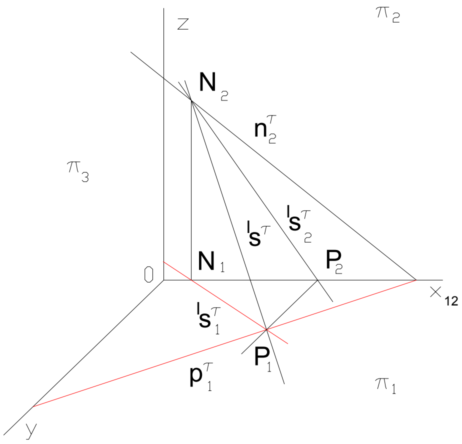
Pozn. Hlavní přímky můžeme zobrazovat a vysvětlovat i jinými způsoby – jako průsečnice roviny rovnoběžné s průmětnou a dané roviny – viz. [1], [2].

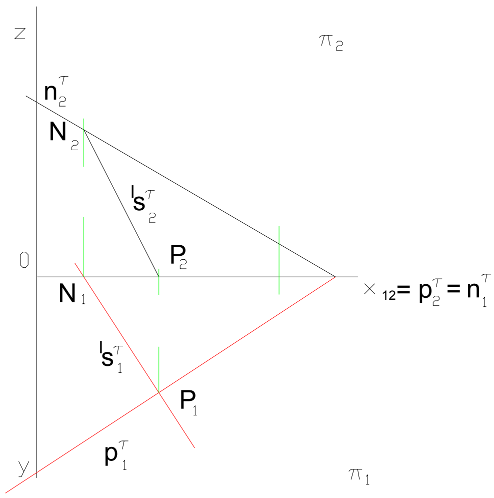
Spádová přímka

Spádová přímka je přímka roviny, která určuje odchylku roviny od průmětny – svírá s průmětnou největší úhel.

Definice: Spádová přímka leží v rovině a v jednom průmětu je kolmá k stopě roviny.

Opět může být spádová přímka kolmá k půdorysné nebo nárysné stopě. Máme obdobně jako hlavní přímky i spádové přímky první a druhé osnovy. Značení je též obdobné. Značíme je písmenem s a jako u hlavních přímek příslušnými indexy - ${}^{I}s_2^{\tau}$ - spádová přímka první osnovy roviny τ druhý průmět. Rovněž písmeno s se nesmí používat pro označení jiných přímek.





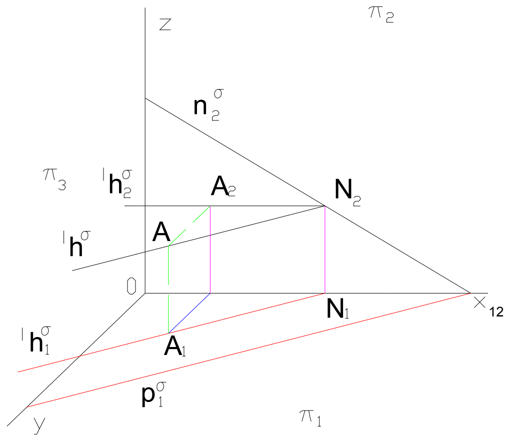
Všechny přímky roviny můžeme využít k určení průmětu bodu, který leží v rovině. Z hlediska přehlednosti ale **využíváme pouze hlavní přímky**. Při použití obecných přímek by se konstrukce stala nepřehlednou a při použití spádových přímek nepřesnou.

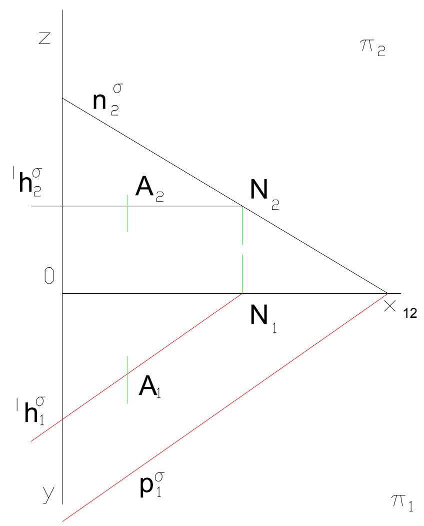
Spádové přímky používáme k sestrojení úhlu, který svírá rovina s průmětnou, protože spádová přímka má v rovině největší „spád“ – odtud její pojmenování. Sestrojení úhlu mezi rovinou a průmětnou bude probráno v kapitole 2.13.

Obecné přímky využíváme k různým konstrukcím, kdy potřebujeme zobrazit v rovině přímku.

<u>Bod v rovině</u>

Vzájemná poloha bodu a roviny – bod buď v rovině leží, nebo je mimo ni. Ze stereometrie víme, že bod leží v rovině tehdy, leží-li na přímce roviny. Toho využíváme k zobrazení bodu. Máme-li zadání bodu, který leží v rovině, je bod zadán pouze jedním průmětem. Chybějící průmět musíme sestrojit pomocí přímky ležící v rovině – **použijeme hlavní přímku**.





Úloha:

Bod $A \in \sigma$. Je zadán: $A(2, ?, 2.5)$ - není určena souřadnice y. Sestrojte A_1. Rovina $\sigma(10, 7, 6)$.

Řešení:

Druhým průmětem bodu A vedeme hlavní přímku roviny. Použili jsme druhý průmět hlavní přímky prvé osnovy – ${}^{I}h_2^{\sigma}$. Pomocí nárysného stopníku sestrojíme ${}^{I}h_1^{\sigma}$. Ordinála určí chybějící průmět A_1. Není nutné využívat pouze hlavní přímky. Můžeme použít obecnou přímku v rovině, nebo spádovou přímku. Použití hlavních přímek je ale přehlednější, jak uvidíte v úlohách, kde se určuje poloha více bodů.

2.8 Obrazec v rovině

Obrazec v rovině je zadán obvykle jedním průmětem. Úlohou je sestrojit chybějící průmět.

Úloha:

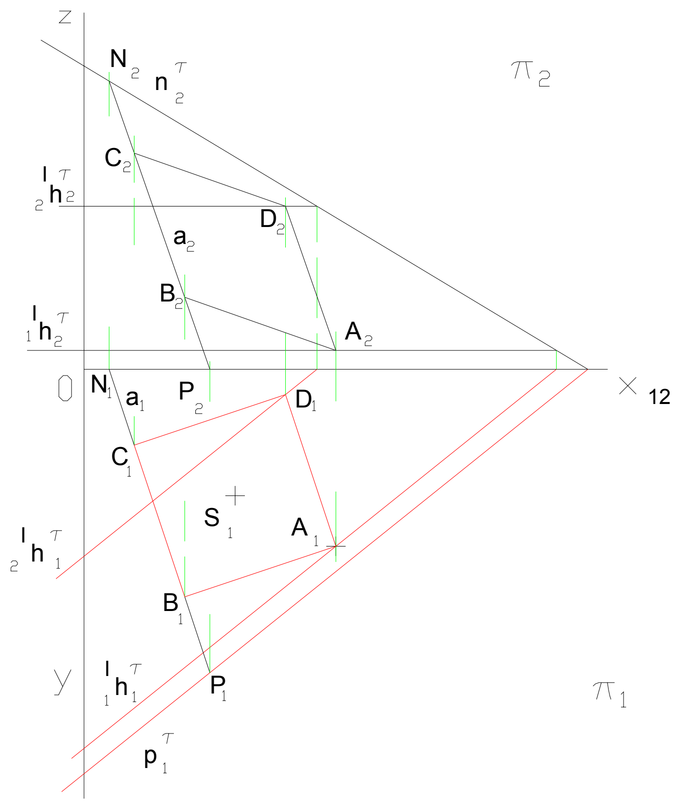
Sestrojte zobrazení čtyřúhelníka, který leží v rovině $\tau(10, 8, 6)$ a promítá se v prvém průmětu jako čtverec. Čtyřúhelník je zadán jedním vrcholem – bodem $A(5, 3.5, ?)$ a středem čtyřúhelníka $S(3, 2.5, ?)$. Sestrojte druhý průmět.

Rozbor:

Sestrojíme prvý průmět čtyřúhelníka. Převedení obrazu do druhého průmětu je možné provést dvěma způsoby:

- Jednotlivé vrcholy čtyřúhelníka převedeme pomocí hlavních přímek. Tento způsob používáme nejčastěji pro jeho přehlednost, velmi dobrou přesnost a univerzálnost.
- Převedeme postupně jednotlivé hrany na základě znalostí o poloze přímky v rovině. Způsob nemůžeme použít ve všech případech, protože při určité poloze hran se přímka převádí obtížně (konstrukce stopníků náročná na prostor výkresu), nebo řešení není přesné.

Na ukázce si předvedeme oba způsoby konstrukce.



Řešení:

1. **Použití hlavní přímky**

Bod *A* a *D* jsme převedli do druhého průmětu pomocí hlavních přímek. Z konstrukce vidíte, že použití těchto přímek je přesné a jednoduché.

2. **Použití obecné přímky:**

Body *B* a *C* převádíme pomocí obecné přímky $a = BC$. Sestrojíme její stopníky a převedeme je do druhého průmětu. Tím je určen průmět a_2. Body *B* a *C* převedeme na a_2 pomocí ordinál. Konstrukce je ale náročná na přesnost kreslení ordinál bodů *B* a *C*. Jestliže bychom chtěli použít tuto konstrukci pro přímku procházející bodem *A* a *B*, nárysný stopník by mohl být na papíru nedosažitelný (zde by vyšel do textu).

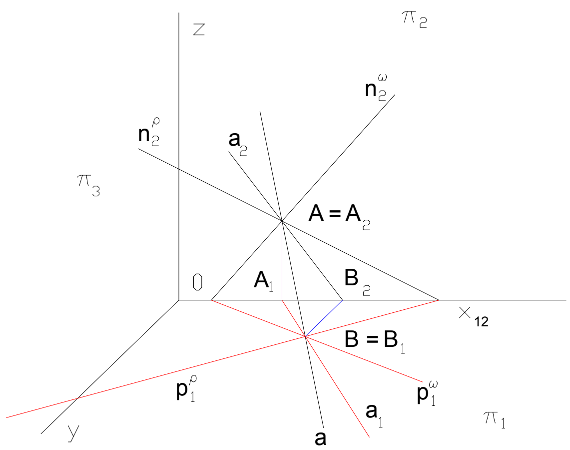
Pozn.

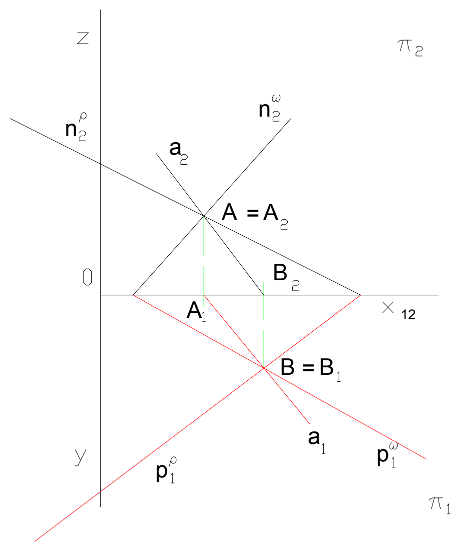
Kontrola správnosti konstrukce – v druhém průmětu musí být strany čtyřúhelníka rovnoběžné.

2.9 Vzájemná poloha rovin

Dvě roviny mohou být – viz. stereometrie – navzájem různoběžné nebo rovnoběžné.

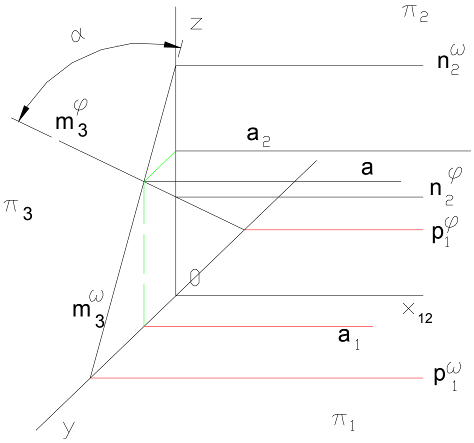
- **Roviny různoběžné**

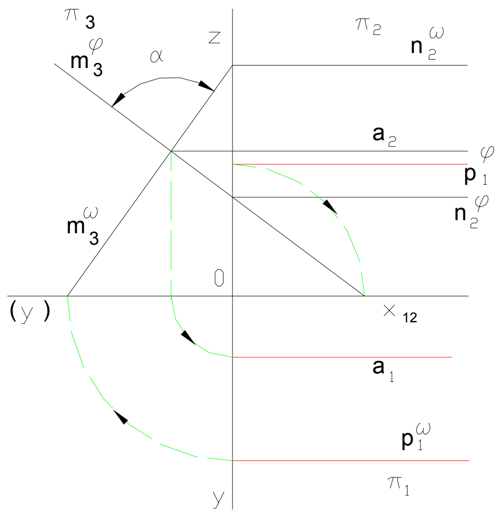




Roviny různoběžné mají jednu společnou přímku a tuto přímku - **průsečnici** – máme zkonstruovat. Konstrukce je velmi jednoduchá – jsou potřebné dva body. Jestliže jsou roviny zadány pomocí stop, jsou tyto body dány průsečíky těchto stop, protože stopy leží v průmětnách a proto se protínají v bodech *A* a *B*. Společná přímka – průsečnice – je přímka $a = AB$.

Úloha: Sestrojte průsečnici *a* rovin $\omega(\infty, 5, 7)$ a $\varphi(\infty, -4, 3)$. Sestrojte též úhel těchto rovin.





Rozbor:

Ze zadání souřadnic rovin je vidět, že se jedná o roviny rovnoběžné s osou x_{12}. V Mongeově promítání v prvém a druhém průmětu bude zobrazení neurčité. Proto musíme převést roviny do třetí průmětny π_3.

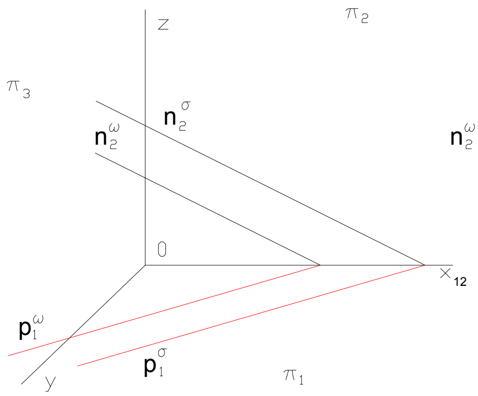
Řešení:

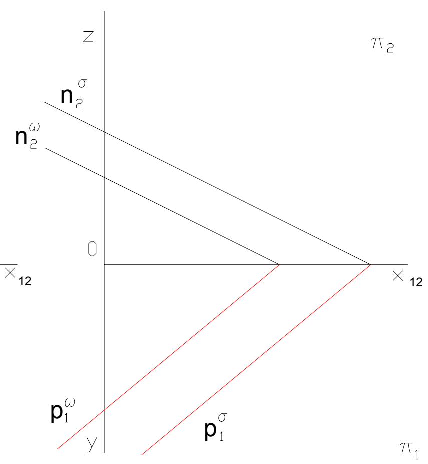
Otočení rovin φ a ω do π_3 – bokorysny - provedeme obdobným způsobem, jako jsme prováděli otočení přímky v 2.3 při konstrukci stopníků. Otočíme bod, v kterém půdorysné stopy rovin protnou osu *y*, na sklopenou osu (*y*). Střed kružnic otáčení je počátek souřadnicového systému 0. U všech bodů musíme zachovat stejný smysl otáčení – týká se to především půdorysné stopy roviny φ, která je v druhém kvadrantu. Průsečíky nárysných stop s osou *z* se neotáčejí. Můžeme sestrojit bokorysné stopy rovin φ a ω, které se označují *m*. Bodem, v kterém se v π_3 tyto stopy protínají, prochází průsečnice *a* obou rovin. Do π_2 můžeme převést průsečnici *a* přímo, do π_1 musíme provést zpětné otočení. Porovnejte si zobrazení v názorném a Mongeově promítání.

V π_3 vidíme též úhel α rovin ω a φ – je určen úhlem bokorysných stop.

- **Rovnoběžné roviny**

Ze stereometrie víme, že dvě roviny, např. ω a σ jsou rovnoběžné, jestliže v rovině ω existují dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s přímkami v rovině σ. Za takovéto přímky můžeme považovat i stopy rovin. Z uvedeného potom vyplývá, že **dvě roviny rovnoběžné, jestliže jsou rovnoběžné stopy obou rovin.**





Z toho též plyne, že rovnoběžné roviny mají rovnoběžné hlavní přímky. Z tohoto poznatku můžeme vycházet při řešení úlohy, kdy máme sestrojit rovnoběžnou rovinu, která prochází daným bodem.

Úloha:

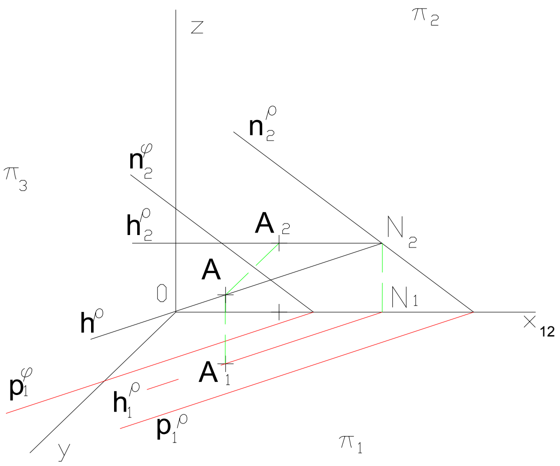
Sestrojte rovinu ρ, která prochází bodem $A(3, 3, 2)$ a je rovnoběžná s rovinou $\varphi(4, 4, 3)$.

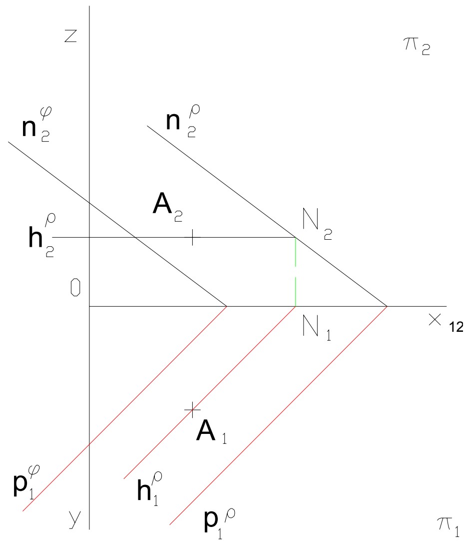
Rozbor:

Rovnoběžné roviny mají rovnoběžné stopy. Protože bod A leží v rovině ρ, můžeme sestrojit hlavní přímku roviny ρ.

Řešení:

Bodem A proložíme hlavní přímku roviny ρ. Použili jsme hlavní přímku prvé osnovy – rovnoběžné s půdorysnou stopou roviny φ. Sestrojíme její nárysný stopník a tím máme určen bod nárysné stopy roviny ρ. Následně můžeme sestrojit i půdorysnou stopu roviny.





2. 10 Přímka a rovina

Mezi přímkou a rovinou mohou nastat tyto vztahy:

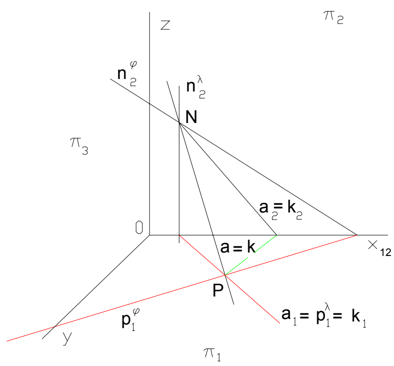
1. Přímka v dané rovině leží.
2. Přímka může rovinu protínat – má s rovinou společný bod – průsečík. Zvláštním případem je přímka k rovině kolmá.
3. Přímka je s rovinou rovnoběžná.

Probereme postupně jednotlivé případy.

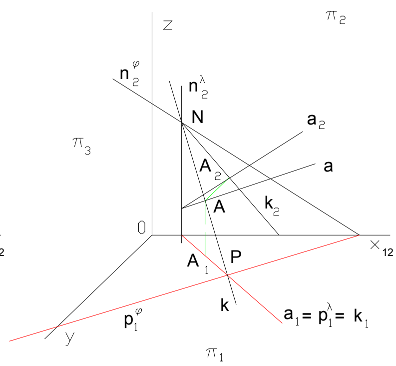
Jaká je poloha přímky a a roviny φ zjistíme, když proložíme přímkou a rovinu λ a zjistíme průsečnici rovin φ a λ. Nejvhodnější rovina pro proložení je rovina kolmá k některé z průměten. Průsečnici říkáme **krycí přímka** a označujeme ji obvykle k.

Mohou nastat tři případy:

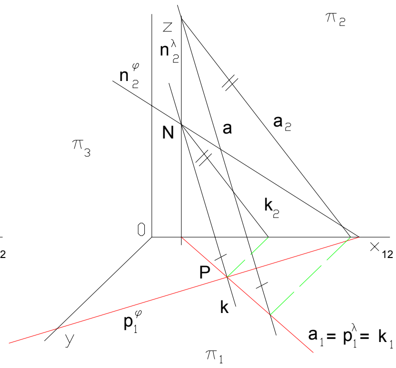
- $a = k$ - přímka leží v rovině
- a má s krycí přímkou k společný bod A. V tom případě přímka a v bodě A protíná rovinu φ.
- a je rovnoběžná s k. V tom případě je přímka a rovnoběžná i s rovinou φ.



Přímka $a = k$ – leží v rovině



Přímka a je různoběžná s k – má s rovinou společný bod A



Přímka $a \parallel k \Rightarrow a \parallel \varphi$

Zajímá nás především druhý případ – zjištění průsečíku přímky s rovinou.

2.10.1 Průsečík přímky s rovinou

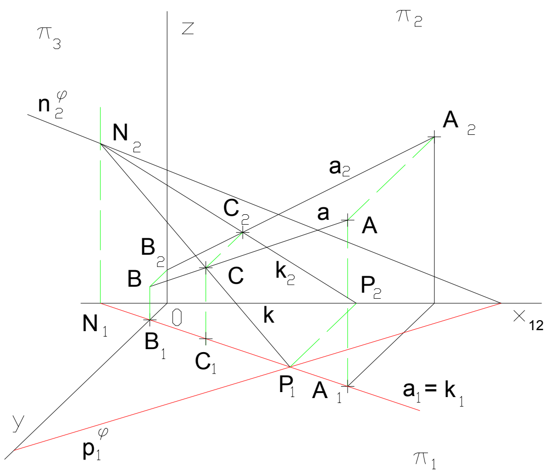
Jak je vidět z předchozího, k určení průsečíku přímky s rovinou použijeme krycí přímku. Prokládání roviny danou přímkou není příliš výhodné. Výhodnější je přímé použití krycí přímky. Proto ji definujeme:

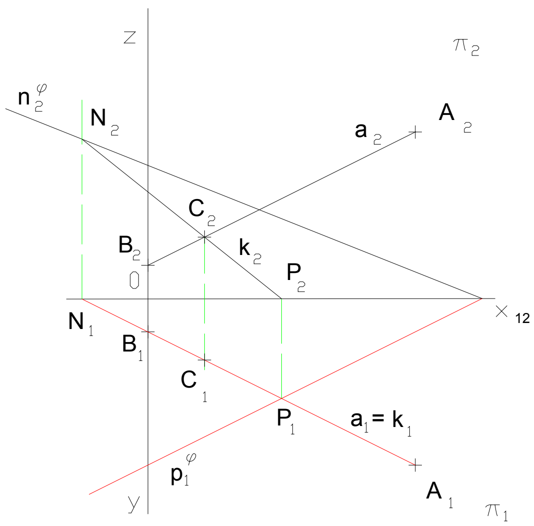
Definice: Krycí přímka je přímka, která je v jednom průmětu shodná s danou přímkou, ale leží v dané rovině.

Využití takto definované krycí přímky bude využitelné i v případě konstrukce průsečíku přímky a rovinného obrazce.

Úloha:

Sestrojte průsečík přímky $a = AB$ s rovinou ω (10, 5, 4). A(8, 5, 5), B(0, 1, 1)





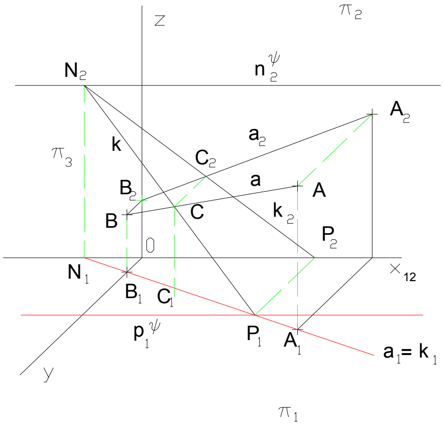
Řešení:

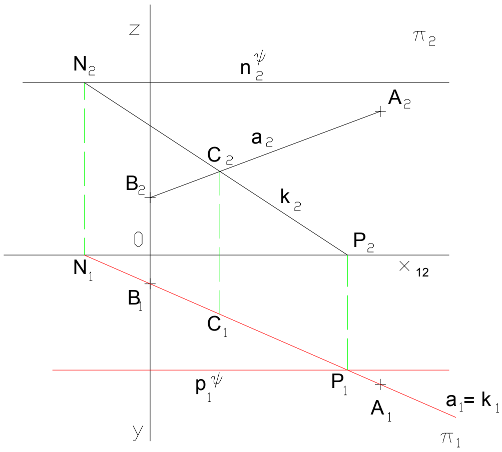
K zjištění průsečíku přímky a využijeme krycí přímku k. Krycí přímka byla zvolena $k_1 = a_1$. Nic ale nebrání tomu, abychom volili krycí přímku shodnou s druhým průmětem přímky a. Protože krycí přímka k leží v rovině, má stopníky na stopách roviny ω. Sestrojíme chybějící průmět krycí přímky a průsečík a_2 s k_2 určí bod C – průsečík přímky a s ω - jejich společný bod.

Pro procvičení další příklad:

Úloha:

Sestrojte průsečík přímky $a = AB$ s rovinou $\psi(\infty, 4, 6)$. $A(8, 4.5, 5)$, $B(0, 1, 2)$





Rozbor:

Průsečík je možné sestrojit pomocí krycí přímky. Je ale též možné provést otočení do π_3 podobně, jako jsme používali u rovin rovnoběžných s osou x_{12} v předchozích případech. Toto řešení je konstrukčně náročnější, ale jistě si jej dokážete představit.

Řešení:

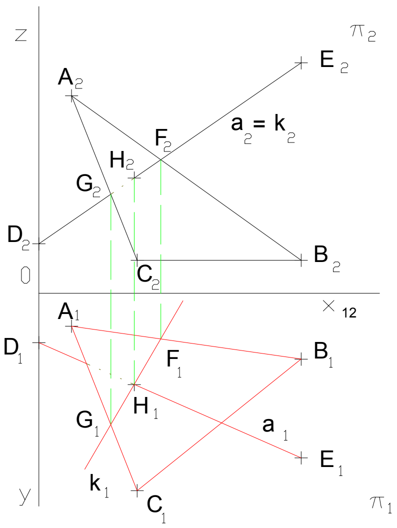
Je obdobné jako v předchozím případě. Volíme $a_1 = k_1$, určíme stopníky krycí přímky a sestrojíme chybějící průmět k_2. Průsečík přímky a s rovinou ψ - bod C je určen průsečíkem a_2 a k_2.

2.10.2 Průsečík přímky s rovinným obrazcem

Průsečík přímky a rovinného obrazce je stejná úloha, jako průsečík přímky s rovinou. Obrazec je část roviny ohraničená úsečkami. Průsečík konstruujeme opět pomocí krycí přímky. Jeden průmět krycí přímky je opět shodný s některým průmětem přímky, u které hledáme průsečík, ale leží v rovině obrazce. Krycí přímka tedy protíná hrany obrazce, a proto můžeme sestrojit chybějící průmět krycí přímky. Průsečík přímky s obrazcem je dán průsečíkem přímky a krycí přímky.

Úloha:

Sestrojte průsečík H trojúhelníka ABC a přímky $a = DE$. A(1, 1, 6), $B(8, 2, 1)$, $C(3, 6, 1)$, $D(0, 1.5, 1.5)$, $E(8, 5, 7)$.



Řešení:

Druhým průmětem přímky a jsme proložili krycí přímku k. Hrany obrazce protíná v bodech G a F – pomocí ordinály sestrojíme prvé průměty těchto bodů. Sestrojíme prvý obraz krycí přímky. Průsečík přímky a s trojúhelníkem ABC je bod H.

Viditelnost:

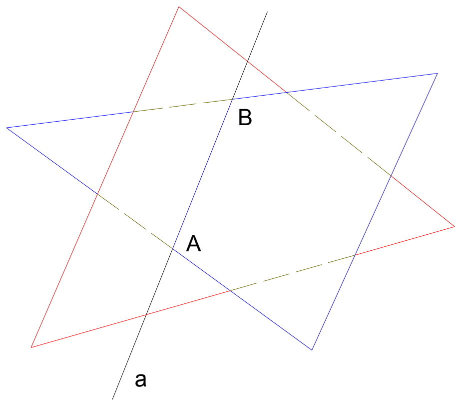
Předpokládáme, že daná rovina není průhledná. K zvýšení větší názornosti zavádíme **pojem viditelnosti**. Viditelnost se řídí podle toho, který objekt je k nám blíže a který je vzdálenější ve směru pohledu (na prvý nebo druhý průmět). Řídíme se velikostí souřadnic. Např. v prvém průmětu body úsečky EH mají souřadnice z větší než body úsečky CB, a proto tato část úsečky bude viditelná. V bodě H se viditelnost mění – průsečík s rovinou trojúhelníka. Obdobně provádíme úvahu o viditelnosti v druhém průmětu.

2.10.3 Průseky obrazců

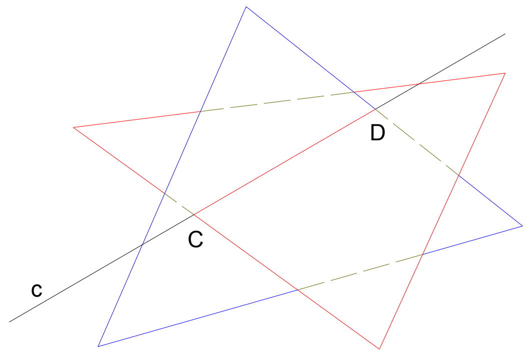
Průseky obrazců jsou jiným způsobem vyjádřené průseky rovin a hledání jejich průsečnice. Rozdíl je jen v zobrazení roviny, která je v případě obrazců omezena jejich hranami. Průsečnice je ale přímka se všemi vlastnostmi přímky. Kreslíme ji jako viditelnou v části, kde je společná oběma obrazcům. Z hlediska druhu průseku máme dva typy:

- úplný průsek, kde jeden obrazec úplně protíná druhý
- zásek, kde průsek obrazců je částečný

Oba průseky konstruujeme stejným způsobem, že hledáme dva body průsečnice. Podle toho, jak průsečnice obrazci prochází, určíme první nebo druhý typ průseku. Jestliže vnitřní body *AB* průsečnice *a* leží pouze na jednom obrazci – jedná se o úplný průsek. Jestliže vnitřní body *CD* průsečnice *c* jsou na obou obrazcích – jedná se o zásek.



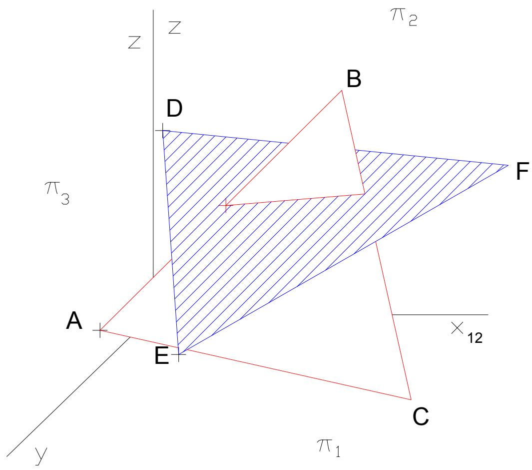
Průsek

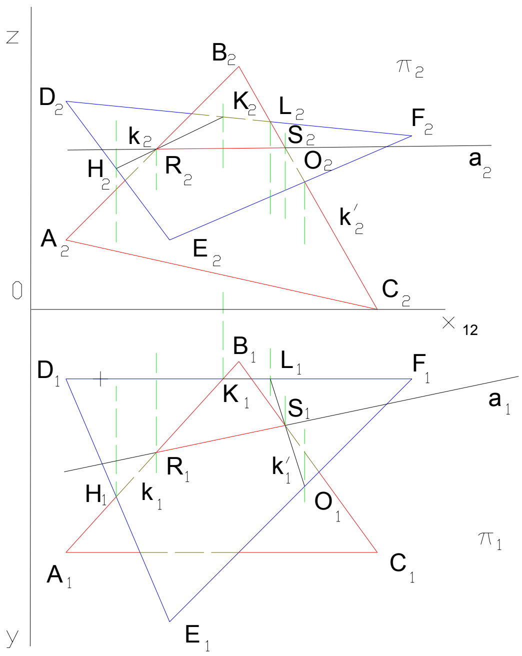


Zásek

Úloha:

Sestrojte průsek dvou trojúhelníků *ABC* a *DEF*. *A*(1, 7, 2), *B*(6, 1.5, 7), *C*(10, 7, 0), *D*(1, 2, 6), *E*(4, 9, 2), *F*(11, 2, 5)





Rozbor:

Při nakreslení zadání je možné odhadnout, jak asi bude průsek vypadat a podle toho volit krycí přímky.

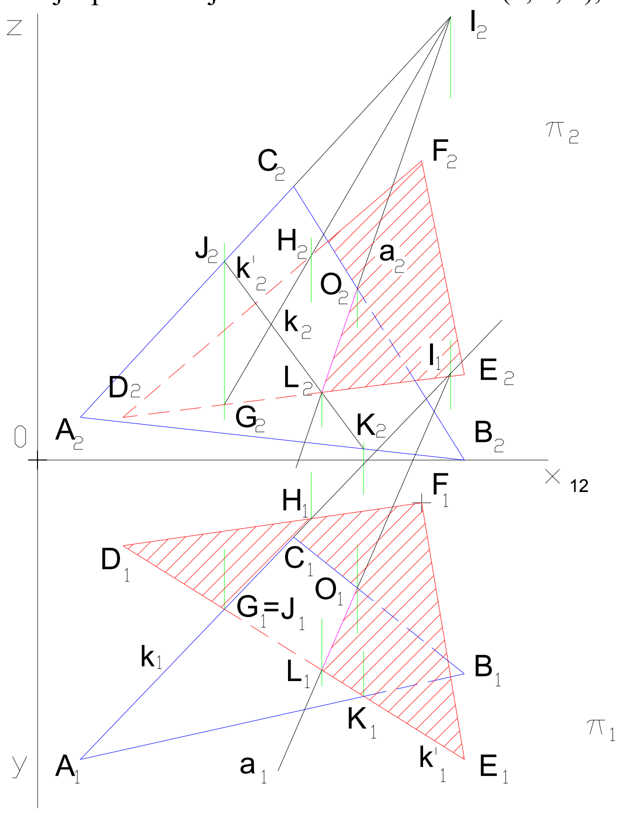
Řešení:

Je předpoklad, že trojúhelník *ABC* plně pronikne trojúhelník *DEF*. Proto volíme krycí přímku $k_1 = A_1B_1$. Tato krycí přímka ale leží v trojúhelníku *DEF* a protíná hranu D_1E_1 v bodě H_1, hranu D_1F_1 v bodě K_1. Sestrojíme druhé průměty těchto bodů a tím druhý průmět krycí přímky k_2. Kde se krycí přímka k_2 protíná s hranou A_2B_2 je průsečík trojúhelníků bod *R*.

Podobně postupujeme i u hrany *BC*. Zde ale byla volena krycí přímka v druhém průmětu $k_2' = B_2C_2$. Postup konstrukce je obdobný jako u krycí přímky *k*.

Úloha:

Sestrojte průsek trojúhelníků *ABC* a *DEF*. *A*(1, 7, 1), *B*(10, 5, 0), *C*(6, 2, 6.5), *D*(2, 2, 1), *E*(10, 7, 2), *F*(9, 1, 7).



Rozbor:

Způsob konstrukce průseku je stejný jako v předchozích úlohách. Proto nebudeme vybírat krycí přímku *k* s ohledem na průsek, ale vybereme ji „náhodně". Jediné, co musíme respektovat, je průsečík krycí přímky a hrany který musíme mít na kreslící ploše.

Řešení:

Jako první krycí přímku volíme $k_1 = A_1C_1$. Krycí přímka leží v rovině trojúhelníka *DEF* a protíná jeho hrany v bodech G_1 a H_1. Tyto body převedeme na hrany trojúhelníka *DEF* do druhého průmětu a sestrojíme druhý průmět krycí přímky k_2. Abychom dostali bod průsečnice *I*, musíme prodloužit hranu *AC*.

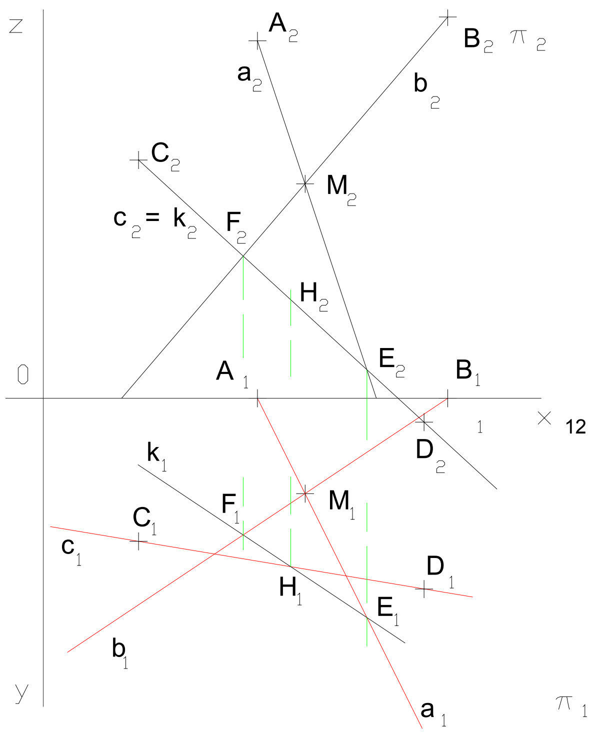
Druhou krycí přímku volíme „rozuměji" - $k_1' = E_1D_1$, která leží v rovině trojúhelníka *ABC*. Hranu A_1C_1 protíná v bodě J_1, hranu A_1B_1 v bodě K_1. Body *J* a *K* převedeme do druhého průmětu a sestrojíme k_2'. Průsečík hrany D_2E_2 s k_2' je bod průsečnice L_2, který převedeme do prvého průmětu. Můžeme zkonstruovat průsečnici rovin trojúhelníků $a = IL$. Ta má vnitřní body na obou obrazcích – bod *L* na hraně *DE* a bod *O* na hraně *CB*. Jedná se tedy o **zásek**.

Viditelnost – musíme si vždy uvědomit, která přímka je výše nad π_1 a která je vzdálenější od π_2.

2.10.4 Průsečík přímky s rovinou zadanou přímkami

Roviny můžeme mít též zadané jen pomocí různoběžných, nebo rovnoběžných přímek a potřebujeme zjistit průsečík s danou přímkou. Je možné sice konstruovat stopy roviny, ale tím se konstrukce stává značně nepřehlednou. Můžeme provést konstrukci přímo pomocí krycí přímky. Krycí přímku zadáváme stejným způsobem. Zjišťujeme ale průsečíky krycí přímky s přímkami, které určují rovinu.

Příklad: Sestrojte průsečík roviny $\tau = ab$ s přímkou *c*. Přímka $a = AM$, $b = BM$, $c = CD$, *A*(4.5, 0, 7.5), *M*(5.5, 2, 4.5), *B*(8.5, 0, 8), *C*(2, 3, 5), *D*(8, 4, -0.5)



Rozbor:

Rovina τ je určena různoběžnými přímkami a a b.

Řešení:

Krycí přímku k jsme si zvolili $c_2 = k_2$. Krycí přímka k_2 protíná přímku a_2 v bodě E_2 a přímku b_2 v bodě F_2. Sestrojíme pomocí ordinál prvý průmět bodů E a F. Tím je určen prvý průmět krycí přímky k_1. Bod $H_1 = k_1 \cap c_1$ je průsečík přímky c s rovinou τ. Druhý průmět – C_2 sestrojíme pomocí ordinály. Obdobně bychom řešili úlohu v případě, že rovina by byla určena rovnoběžnými přímkami.

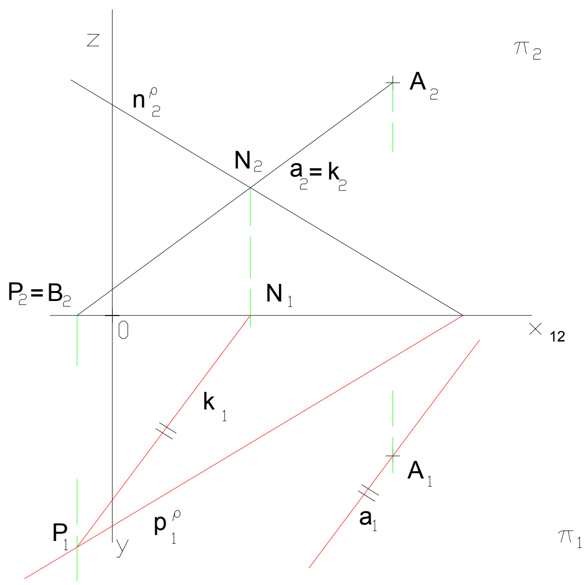
2. 10.5 Přímka rovnoběžná s rovinou

Ze stereometrie známe, že:

Definice: Přímka je rovnoběžná s rovinou tehdy, jestliže je rovnoběžná s přímkou, která v rovině leží.

Úloha:

Sestrojte přímku $a = AB$, která je rovnoběžná s rovinou $\rho(100, 60, 60)$. $A(8, 4, 6.5)$, $B(-1, ?, 0)$



Rozbor:

Přímka v rovině, která je s daným průmětem přímky rovnoběžná, může být libovolně zvolená přímka v daném průmětu roviny. Můžeme ale použít též krycí přímku.

Použijeme-li krycí přímku, úloha se značně zjednoduší. Krycí přímku ale nelze vždy použít, např. když stopníky vychází mimo kreslící plochu.

Řešení:

Přímka a je určena druhým průmětem a úkolem je sestrojit prvý průmět. Volíme krycí přímku $k_2 = a_2$. Sestrojíme prvý průmět krycí přímky – k_1. S tímto průmětem vedeme rovnoběžnou přímku prvým průmětem bodu A a získáme prvý průmět přímky a. Prvý průmět bodu B je mimo plochu zobrazení.

Obdobným způsobem by bylo možné řešit úlohu v případě, že rovina je zadána dvěmi přímkami.

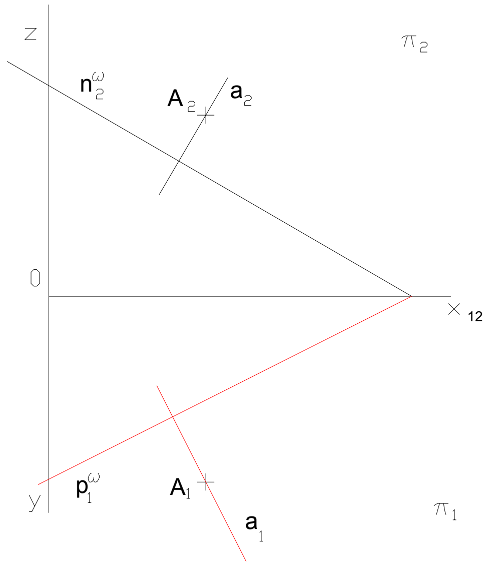
2. 11 Přímka kolmá k rovině

Přímku kolmou k dané rovině sestrojíme na základě definice.

Definice: Přímka kolmá k rovině se jeví jako kolmá ke stopám roviny.

Úloha:

Sestrojte z bodu A přímku a kolmou k rovině ω. Rovinu a bod A si volte.



Řešení:

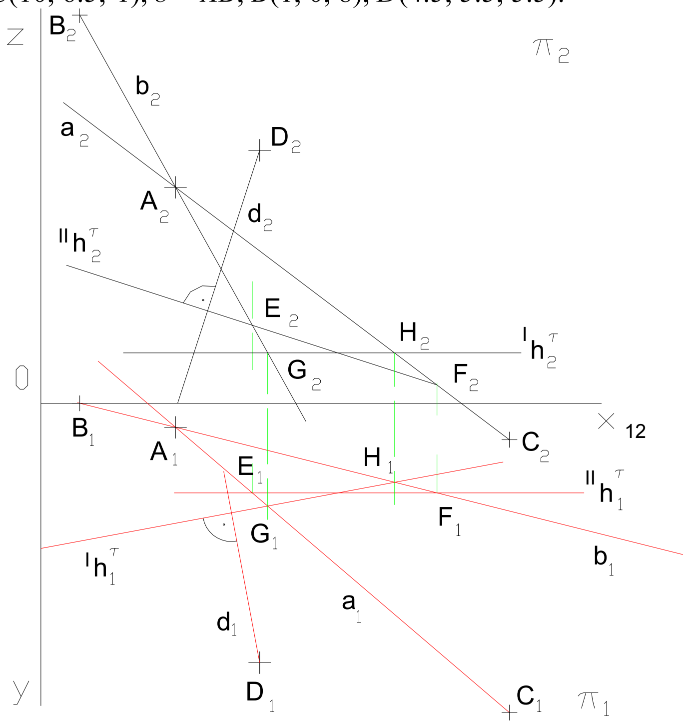
Z bodu A sestrojíme přímku a kolmou ke stopám roviny ω – viz. definice.

Obdobným způsobem sestrojíme kolmici i tehdy, jestliže rovina bude zadána pomocí dvou rovnoběžných nebo různoběžných přímek.

Konstrukce by byla provedena pomocí hlavních přímek roviny.

Úloha:

Rovina $\tau = ab$. Sestrojte kolmici d k rovině τ z bodu D. Zadání: $a = AC$, $A(3, 0.5, 4.5)$, $C(10, 6.5,-1)$, $b = AB$, $B(1, 0, 8)$, $D(4.5, 5.5, 5.5)$.



Rozbor:

Jestliže přímka kolmá k rovině je kolmá k stopám roviny, musí být též kolmá k průmětu hlavní přímky.

Při konstrukci hlavní přímky volíme průmět, který je rovnoběžný s osou x_{12}. Sestrojíme chybějící průmět přímky a můžeme sestrojit v tomto průmětu též kolmici k dané rovině.

Řešení:

V prvém průmětu zkonstruujeme hlavní přímku ${}^{II}h_1{}^{\tau}$, která protíná přímku a v bodě E a přímku b v bodě F. Sestrojíme druhé průměty těchto bodů a získáme druhý průmět hlavní přímky ${}^{II}h_2{}^{\tau}$. Z druhého průmětu bodu C můžeme zkonstruovat kolmici k rovině $\tau - c_2$.

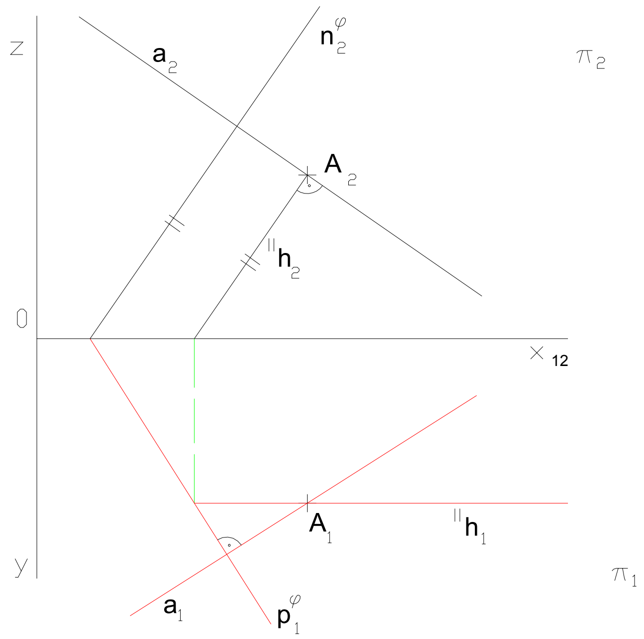
Obdobně konstruujeme prvý průmět kolmice. Zvolíme si a zkonstruujeme hlavní přímku prvé osnovy ${}^{I}h_2{}^{\tau}$ a sestrojíme prvý průmět ${}^{I}h_1{}^{\tau}$ pomocí bodů H a G. Vedeme z C_1 prvý průmět kolmice k τ - c_1.

2.12 Rovina kolmá k přímce

Konstrukce roviny kolmé k přímce je obrácená úloha předchozí. Opět stopy roviny jsou kolmé k dané přímce. Úloha ale musí být upřesněna – rovina musí procházet určitým bodem přímky. Ke konstrukci využijeme hlavní přímky roviny.

Úloha:

Sestrojte rovinu φ kolmou k přímce a v bodě A. Zobrazte stopy. Polohu přímky a a bod A si volte.



Řešení:

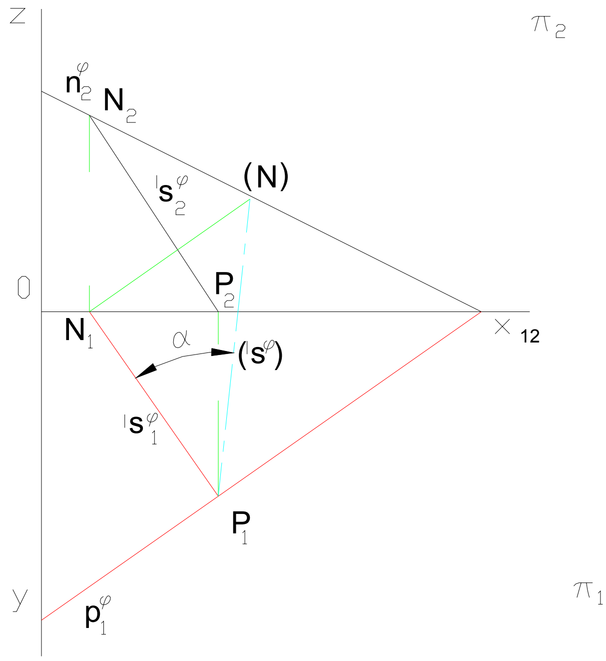
Konstrukce je jednoduchá. V bodě A sestrojíme hlavní přímku roviny φ - volili jsme přímku druhé osnovy - ${}^{II}h_2$ Sestrojíme půdorysný stopník P_2, kterým v prvém průmětu vedeme půdorysnou stopu. Podle definice je stopa kolmá k dané přímce. Sestrojíme nárysnou stopu.

Je opět velmi častou úlohou, že máme sestrojit rovinu kolmou k přímce, ale z nějakého důvodu nemůžeme sestrojit stopy. V tomto případě využijeme k určení roviny hlavní přímky obou osnov, které vedeme daným bodem na přímce.

2.13 Úhel mezi rovinou a průmětnou

Úhel mezi rovinou a průmětnou sestrojíme pomocí spádové přímky roviny, kterou sklopíme do průmětny, u které hledáme příslušný úhel.

Úloha: Sestrojte úhel α, který svírá rovina φ s π_1. $\varphi(10, 7, 5)$.



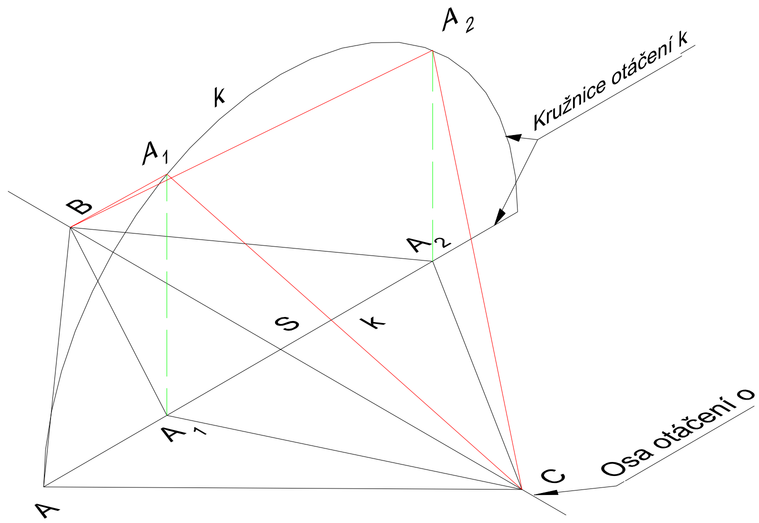
Řešení:

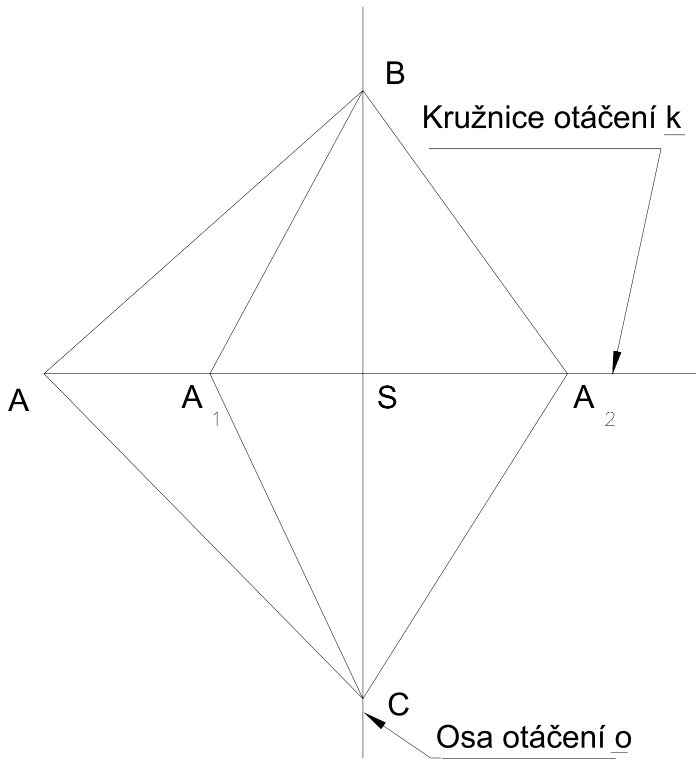
V prvém průmětu si libovolně zkonstruujeme spádovou přímku prvé osnovy - ${}^{I}s_1{}^{\varphi}$. Spádovou přímku sklopíme do π_1. Sklopením určíme nejen skutečnou délku spádové přímky mezi stopníky, ale i úhel, který svírá s průmětnou. To je též úhel roviny a průmětny.

3. Průměty rovinných útvarů a hranatých těles

3.1 Afinita

Se základy afinity (příbuznosti) jsme se seznámili již ve stereometrii. Přesto je vhodné zopakování této problematiky a odvození zákonů afinity.





Máme trojúhelník *ABC*, který leží v průmětně. Tento trojúhelník otáčíme okolo strany *BC*, která je osou otáčení *o*. Bod *A* se otáčí po kružnici *k* se středem *S* do polohy A_1, A_2. Na obrázku názorně vidíme toto otáčení. Vidíme jednotlivé polohy natočeného trojúhelníka a též skutečné polohy a průměty vrcholu *A* pro jednotlivá natočení. Názorně vidíme též kružnici otáčení *k*, která se jeví jako elipsa a průmět této kružnice do průmětny.

Vrátíme se k pravoúhlému průmětu, který je již méně názorný. Kružnice otáčení se jeví jako přímka, na které leží průměty bodů dané otočením. Tyto průměty nazýváme **odpovídající body**. Osa otáčení se nazývá **osa afinity** a značíme ji buď *o*, nebo o_a. Přímky *AB*, A_1B, A_2B jsou **odpovídající přímky**.

Z toho, co bylo zobrazeno, můžeme odvodit **zákony afinity**:

1. Odpovídající body leží na přímce kolmé k ose afinity
2. Odpovídající přímky se protínají na ose afinity.

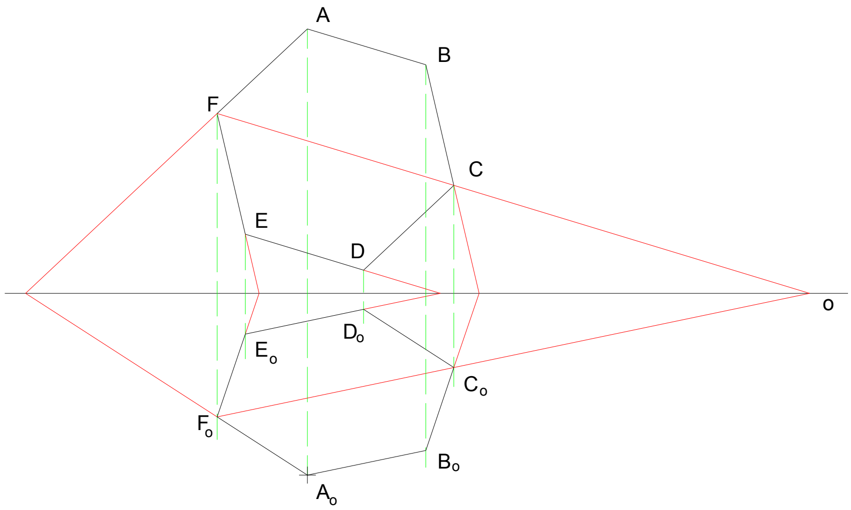
Afinita, která je zde zobrazena a odvozena, se nazývá **pravoúhlá**. Afinita může být i **obecná**, která se používá při zobrazení v názorném promítání nebo při konstrukci řezu hranolu. V tom případě prvý zákon afinity můžeme formulovat obecněji - **odpovídající body leží na přímce rovnoběžné se směrem afinity**.

Směr afinity je u pravoúhlé afinity dán kolmicí k ose, ale u obecné afinity je šikmý.

Je vhodné si afinitu procvičit na několika příkladech a naučit se ji mechanicky používat. Při řešení těchto příkladů nás nezajímá, jak je provedeno natočení. Afinita ale musí být vždy zadána osou a dvěma odpovídajícím body. Následující úloha je jedním z příkladů.

Úloha:

Sestrojte odpovídající obraz pravidelného šestiúhelníka *ABCDEF*. Afinita je zadána osou *o* a odpovídajícími body *A* a A_o.



Řešení:

Při konstrukci vycházíme z bodu *A*. Protože přímka *AB* má průsečík s osou afinity mimo kreslící plochu, využijeme bod *A* k sestrojení F_o. Ke zkonstruování bodu C_o použijeme přímku *FC*. Tato přímka je konstrukčně přesnější než přímka *AC*, kterou můžeme též použít. Nejméně přesné je sestrojení bodu B_o, kde jsme k sestrojení použili bod *C*.

Správnost a přesnost konstrukce potvrzuje, že šestiúhelník $A_oB_oC_oD_oE_oF_o$ je též rovnoběžník.

Afinitu využíváme u otáčení obrazců v obecné rovině do průmětny při zjišťování skutečné velikosti obrazce, při sestrojení řezu u hranolů a při konstrukcích v názorném promítání.

3.2 Kolineace

Kolineace je obdobná afinitě. Kolineace ale nemá tak široké použití jako afinita. Využívá se při konstrukci řezu jehlanů a kuželů.

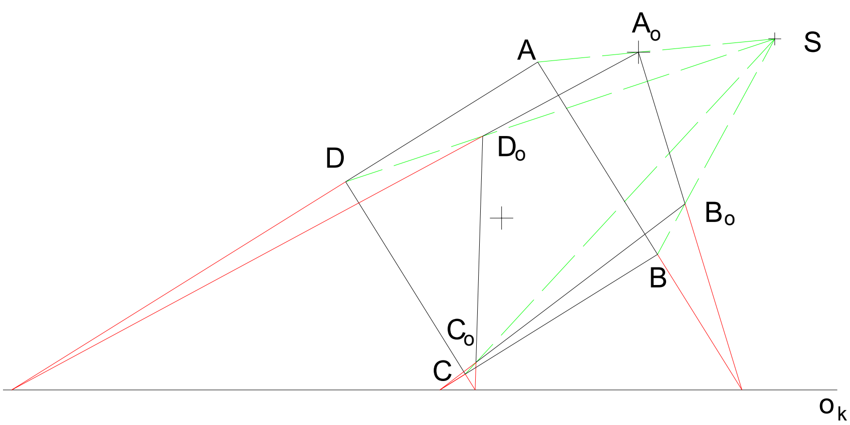
Zákony kolineace:

1. Odpovídající přímky se protínají na ose kolineace.
2. Odpovídající body leží na spojnici se středem kolineace.

První zákon je stejný jako v afinitě. Druhý zákon též odpovídá afinitě, ale průsečík přímek směrů kolineace je reálný, bod *S* – střed kolineace a nikoliv v nekonečnu jako u afinity.

Úloha:

Sestrojte k čtyřúhelníku *ABCD* odpovídající útvar $A_oB_oC_oD_o$ ve středové kolineaci. Kolineace je dána středem *S*, osou o_k a dvojicí odpovídajících bodů *A*, A_o.



3.3 Skutečná velikost obrazce v rovině

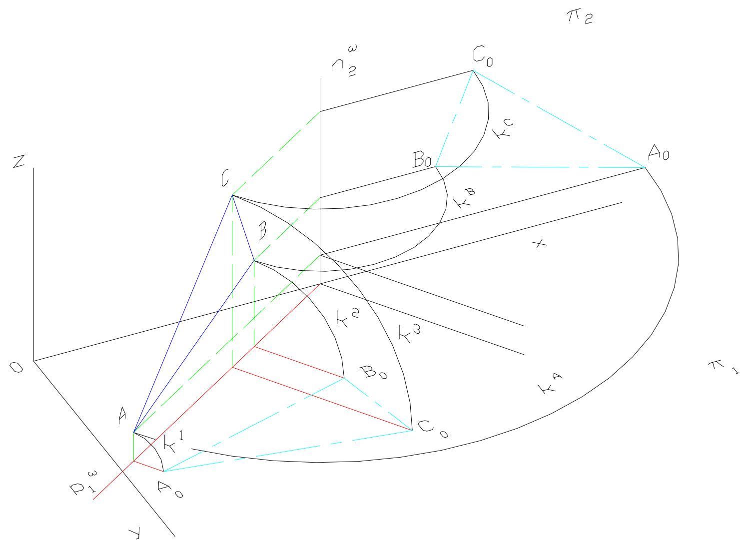
Máme za úkol zjistit, jaká je skutečná velikost obrazce, který leží v zadané rovině. Řešení této úlohy je závislé na poloze roviny.Vždy ale musíme otočit obrazec do některé průmětny nebo do roviny s průmětnou rovnoběžnou, kde se promítá ve skutečné velikosti.

1. Obrazec leží v rovině rovnoběžné s průmětnou – z předchozího víme, že je ve skutečné velikosti.
2. Obrazec leží v rovině kolmé k některé z průměten – otáčíme okolo stopy roviny buď do π_1 nebo π_2.
3. Obrazec leží v rovině obecně zobrazené v souřadnicovém systému – otáčíme též do π_1 nebo π_2, ale využíváme obvykle afinity.

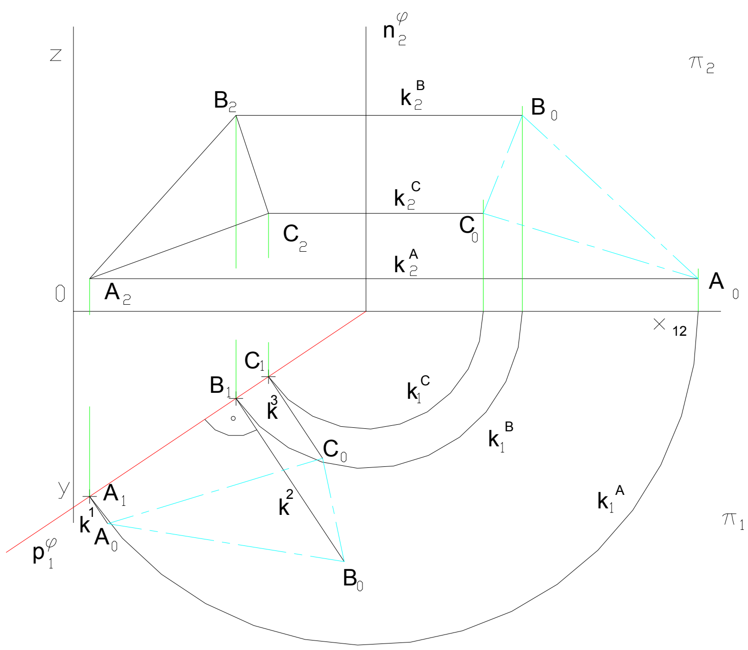
Nejlépe je vidět způsob konstrukce na příkladě. Začneme nejjednodušší konstrukcí, kdy obrazec leží v rovině kolmé k průmětně. Zvolíme rovinu kolmou k π_1. Obdobně by se provádělo zkonstruování skutečné velikosti v případě roviny kolmé k π_2.

Úloha:

V rovině $\varphi \subset$ trojúhelník ABC. Sestrojte skutečnou velikost trojúhelníka. $A(5, ?, 10)$, $B(50, ?, 60)$, $C(60, ?, 30)$, $\varphi(90, 60, \infty)$



Názorné zobrazení otočení trojúhelníka do π_1 a π_2.



Otočení trojúhelníka do průměten Mongeova promítání.

Rozbor:

Otáčení provádíme okolo stop roviny φ. Logicky je osou otáčení do π_2 nárysná stopa, do π_1 je osou půdorysná stopa roviny.

Řešení:

Otáčíme-li do π_2, tak kružnice otáčení leží v rovině rovnoběžné s π_1 a jeví se v druhém průmětu jako přímka $\perp$ k n_2^{φ}. Tyto kružnice jsou označeny k^A, k^B, k^C. Poloměr otáčení vidíme v prvém průmětu, kde kružnice zkonstruujeme a průsečíky s nárysnou přeneseme pomocí promítacích paprsků do druhého průmětu.

Otáčíme-li do π_1, osa otáčení je půdorysná stopa roviny φ. Kružnice otáčení v druhém průmětu by se jevily jako elipsy. To vidíme dobře z názorného zobrazení. V prvém průmětu se tyto kružnice promítají jako přímky kolmé k ose otáčení – to připomíná konstrukci skutečné velikosti úsečky. Proto používáme též vedle termínu otáčení termín sklápění. Též poloměr kružnic otáčení je souřadnice z příslušných bodů. Velmi dobře je to vidět v názorném zobrazení.

Zhodnocení jednotlivých metod:

Sestrojení skutečné velikosti otočením do prvého průmětny je velmi jednoduché a nenáročné na prostor kreslení. Otočení je ale méně názorné.

Sestrojení skutečné velikosti otočením do druhé průmětny je náročné na prostor, ale dává velmi dobrou představu o otočení.

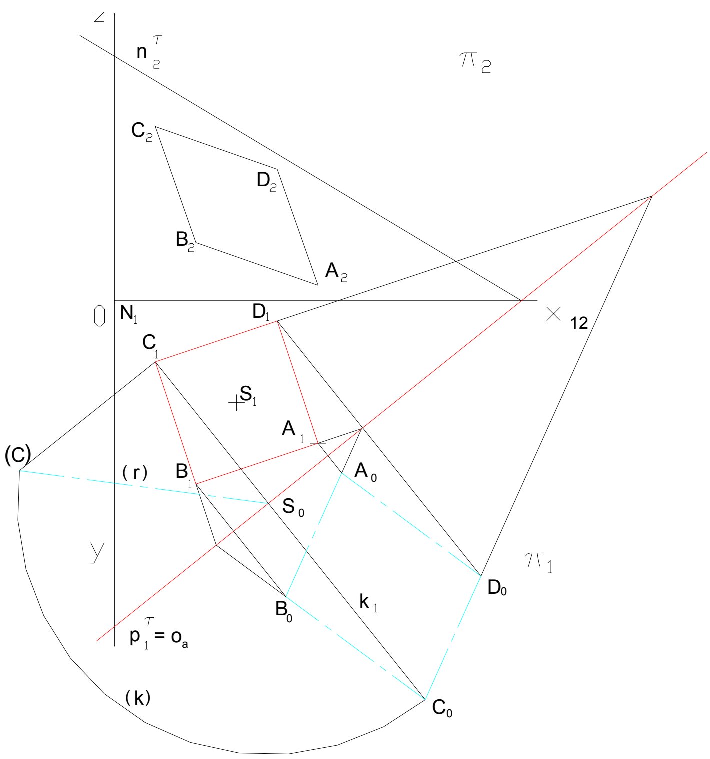
Existuje další možnost konstrukce. V Mongeově promítání pouze při otočení do druhé průmětny, kde je možné využít afinity. Otočíme jeden bod – z hlediska přesnosti konstrukce bod A, který je nejdále od osy otáčení – osy afinity. Pro ostatní body lze využít afinitu.

V názorném promítání můžeme využít obecné afinity při otáčení jak do prvé, tak do druhé průmětny. (V obecné afinitě je dán směr afinity spojnicí dvou odpovídajících bodů.)

Konstrukce ale nejsou naznačeny v řešení úlohy – obrázky by již byly nepřehledné.

Úloha:

Sestrojte skutečnou velikost čtyřúhelníka, který leží v rovině $\tau(10, 8, 6)$ a promítá se v prvém průmětu jako čtverec. Čtyřúhelník je zadán jedním vrcholem – bod $A(5, 3.5, ?)$ a středem čtyřúhelníka $S(3, 2.5, ?)$.



Rozbor:

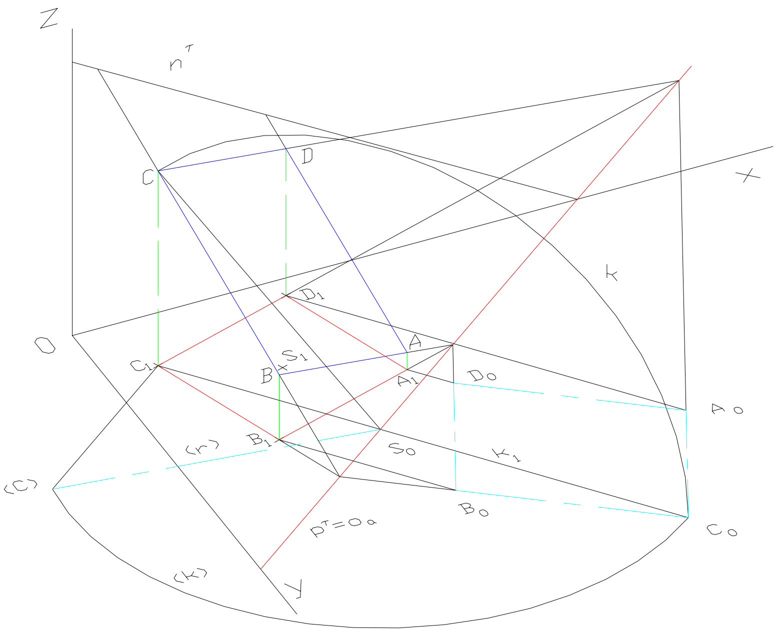
Obrazec je zobrazen v obecné rovině a nelze využít jednoduchého otáčení jako u roviny kolmé k průmětně. Musíme otočit jeden bod a dále je vhodné využití afinity. Tento způsob konstrukce je přehledný a též dostatečně přesný. První bod, který otáčíme, musí být nejvzdálenější od osy otáčení – osy afinity.

Řešení:

Skutečnou velikost obrazce získáme otočením okolo p_1^{τ} do $\underline{\pi_1}$. První otočíme bod C. Bod se otáčí po kružnici k, která se v prvém průmětu jeví jako přímka kolmá k p_1^{τ}. Lze též říci, že kružnice leží v rovině $\perp$ k p_1^{τ} a proto se jeví jako přímka. Střed kružnice k_1 je bod S_O. Protože známe bod kružnice otáčení C_1 a její střed, vidíme též průmět

poloměru k_1. Sestrojíme skutečnou velikost poloměru *(r)* sklopením bodu *C*. Můžeme zkonstruovat sklopenou kružnici *(k)* a ta nám určí polohu otočeného bodu C_O.
Další body čtyřúhelníka sestrojíme pomocí afinity, protože známe osu o_a, a dvojici odpovídajících bodů C_1, C_O.

Otočení je možné provést i do π_2. Při konstrukci bychom ale měli též brát ohled na její přesnost. Vždy bude přesnější konstrukce, kde máme body, které jsou ve větší vzdálenosti od osy afinity.



Názorné zobrazení sestrojení skutečné velikosti čtyřúhelníka.

V názorném zobrazení vidíme mimo pravoúhlé afinity při otáčení obrazce do π_1 též afinitu mezi čtyřúhelníkem *ABCD* ve skutečné rovině a prvým průmětem čtyřhelníka $A_1B_1C_1D_1$.. Rovněž zde je osou afinity p^τ. Směr afinity je ale dán promítacími paprsky rovnoběžnými s osou *z*. V zobrazení vidíme názorně otočení bodu *C* a kružnici otáčení - *k* ve skutečnosti, v prvém průmětu – k_1, i ve sklopení - *(k)*.

Porovnejte názorné zobrazení s Mongeovým promítáním. Tento způsob otočení budeme používat ke zjištění skutečných velikostí ploch u řezů těles. Otáčení budeme používat i u dalších úloh – skutečná velikost úhlu dvou přímek, úhel mezi přímkou a rovinou atd..

Poznámka:

U dalších konstrukcí již nebude zobrazována konstrukce v názorném promítání, protože je možné si z předchozích názorných konstrukcí představit konstrukce další. Jestliže dosud představivost tak vyvinuta není, bylo by dobré se vrátit k předcházejícím úlohám a názornou představu si vylepšit. V následujících úlohách budeme též navazovat na předcházející znalosti a představy.

3.4 Úhel dvou různoběžných přímek

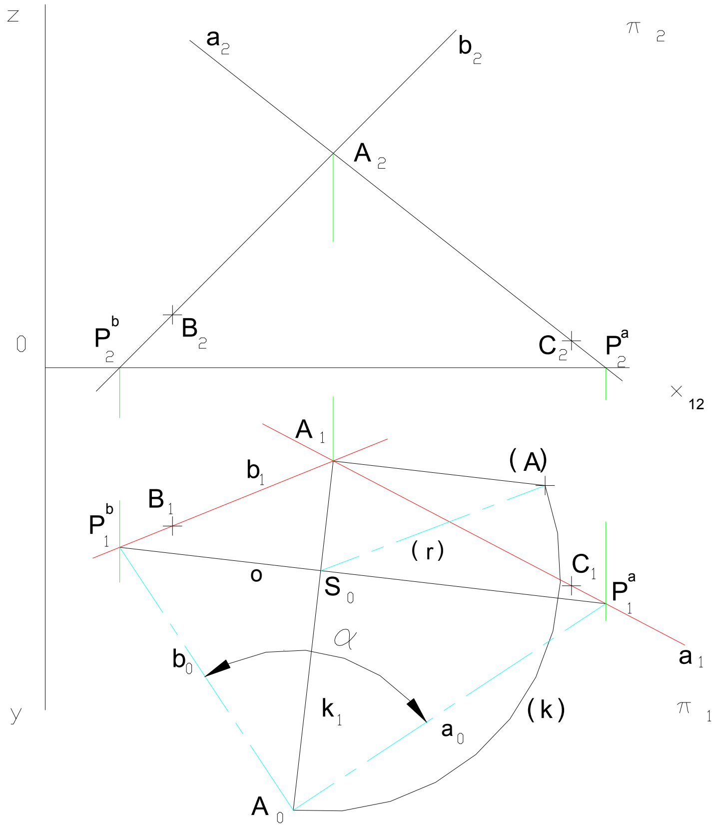
Často potřebujeme zjistit úhel dvou různoběžných přímek. Jistě si již dokážete představit, že skutečnou velikost jak délek, tak úhlů vidíme pouze v průmětnách nebo v rovinách s průmětnami rovnoběžnými. Opět se bude jednat o otočení do těchto rovin.

Úloha:

Sestrojte úhel, který svírají dvě různoběžné přímky $a = AC$ a .$b = AB$. $A(5.5,\ 1.5,\ 4)$, $B(2.5,\ 3,\ 1)$, $C(10,\ 4,\ 0.5)$

Rozbor:

Nejjednodušší otočení přímek je do průměten - π_1 nebo π_2. Osa otáčení *o* je v tomto případě dána stopníky přímek. Při otáčení do π_1 půdorysnými, do π_2 nárysnými. Do které průmětny provedeme otočení, závisí na poloze stopníků a možnostech, kam můžeme otáčení provést. Snažíme se vždy o takové otočení, kde otočené přímky nebudou překrývat zadané průměty. Ze stereometrie víme, že úhel přímek je brán jako ostrý úhel mezi přímkami.



Řešení:

U zadaných přímek jsou pro otočení nejvhodnější půdorysné stopníky. Při otočení do nárysny by plocha zobrazení byla buď příliš veliká (při otočení nahoru) nebo by zobrazení bylo méně přehledné, překrývalo by se s průmětem přímek (při otočení dolu).

Sestrojíme průměty půdorysných stopníků P^a a P^b. Tyto stopníky určují přímku o - osu otáčení přímek do π_1. Bod A se otáčí po kružnici k, která se jeví jako přímka kolmá k ose otáčení. Sestrojíme střed kružnice S_o a skutečnou vzdálenost $|AS_o|$, což je poloměr kružnice otáčení. Sestrojíme sklopenou kružnici k_o a tím je určen i bod A_o. Sestrojíme otočené přímky a_o a b_o. Konstrukce otočení je stejná jako v předchozím příkladu.

Obdobně by se konstruoval úhel dvou mimoběžných přímek. Ze stereometrie víme, že v tomto případě převedeme úlohu na konstrukci dvou různoběžných přímek. Zkonstruujeme přímku rovnoběžnou s jednou mimoběžnou přímkou ve zdánlivém průsečíku přímek. Konstrukce je potom stejná jako úhel různoběžek.

3.5 Úhel přímky s rovinou

Rovněž tato úloha je založena na otočení do průmětny. Složitost úlohy je závislá na poloze přímky k dané rovině.

Princip řešení je v proložení roviny kolmé danou přímkou k dané rovině. Tato úloha je poměrně náročná na konstrukci, jestliže přímka má obecnou polohu.

Značně se konstrukce zjednoduší tehdy, jestliže je přímka, u které úhel s rovinou máme zjistit, v některém průmětu kolmá ke stopě roviny. V tom případě můžeme proložit přímkou rovinu kolmou k průmětně a tato rovina je kolmá i k dané rovině. Průsečnice i úhel je v této rovině. Můžeme tuto rovinu pouze otočit (nebo sklopit) do příslušné průmětny a úhel vidíme ve skutečné velikosti.

Úloha:

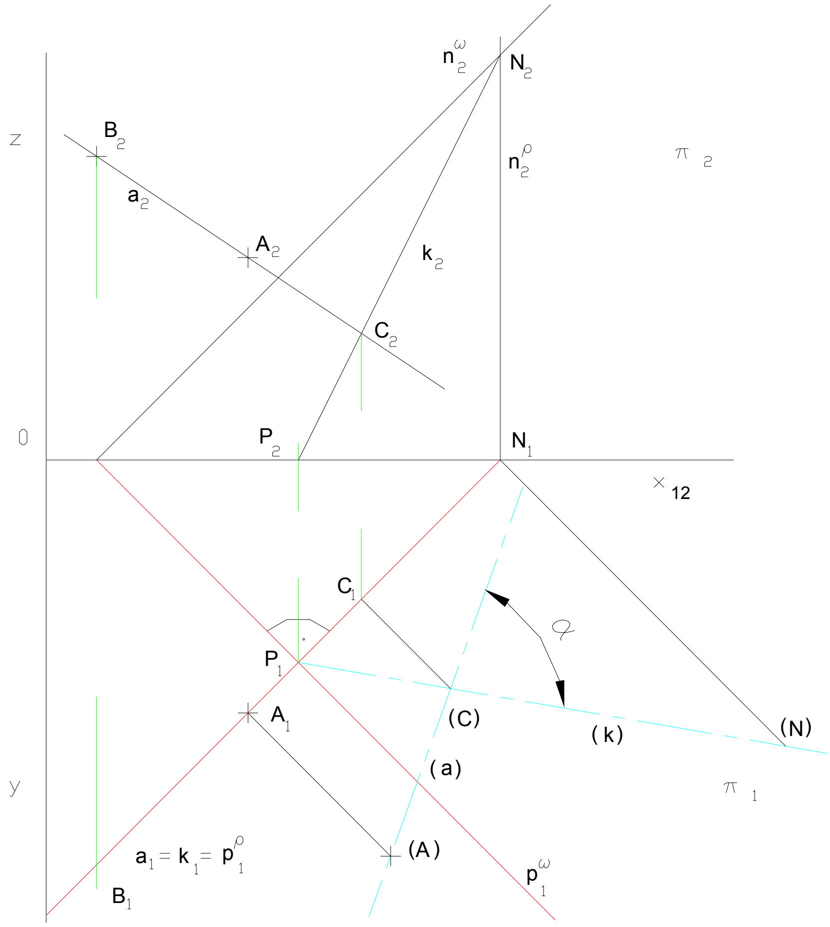
Sestrojte úhel, který svírá přímka $a = AB$ s rovinou $\omega(1, -1, -1)$. Bod $A(4, 5, 4)$, $B(1, ?, 6)$, $a_1 \perp p_1^{\omega}$.

Rozbor:

Jedná se o případ, kdy přímka je v jednom průmětu kolmá ke stopě roviny a můžeme přímkou proložit rovinu kolmou k ω.

Řešení:

Přímkou a proložíme rovinu $\rho \perp \pi_1$, která je též kolmá k ω. Sestrojíme průsečík a s ω bod C. Sklopíme $|AC|$ do π_1 a zároveň sklopíme průsečnici ρ a ω - úsečku $|PN|$. Ostrý úhel α mezi $|AC|$ a $|PN|$ je úhel mezi a a rovinou ω.



Příklad je jednoduchý. Složitější příklad by nastal v případě obecné polohy přímky a dané roviny. V tomto případě musíme proložit přímkou rovinu kolmou k dané rovině a sestrojit průsečnici obou rovin. K tomuto příkladu se dostaneme v kapitole 4.4. Následně potom sestrojíme úhel mezi průsečnicí a danou přímkou – obdobně jako v 3.4.

4. Metrické úlohy

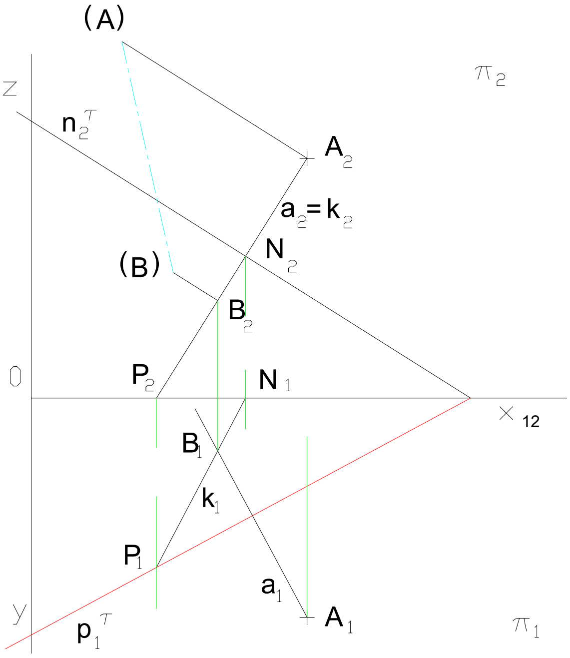
Metrické úlohy jsou takové úlohy, kdy máme zjistit vzdálenost geometrických prvků nebo vést geometrický prvek určitým způsobem. Některé tyto úlohy jsme již probrali, protože jsou velmi jednoduché, např. zjišťování délky úsečky a další. Pomocí nich jsme si zvyšovali představivost. Další úlohy jsou již složitější a využívají získaných znalostí.

4.1 Vzdálenost bodu od roviny

Tato úloha je z daných úloh nejjednodušší.

Úloha:

Sestrojte vzdálenost bodu $A(7, 5.5, 6)$ od roviny $\tau(11, 6, 7)$.



Rozbor:

Vzdálenost bodu od roviny je nejmenší ze všech vzdáleností daného bodu a jednotlivých bodů roviny. Vzdálenost je na kolmici z daného bodu k dané rovině. Je dána úsečkou, kde počáteční bod je zadaný bod a druhý je průsečík kolmice s danou rovinou.

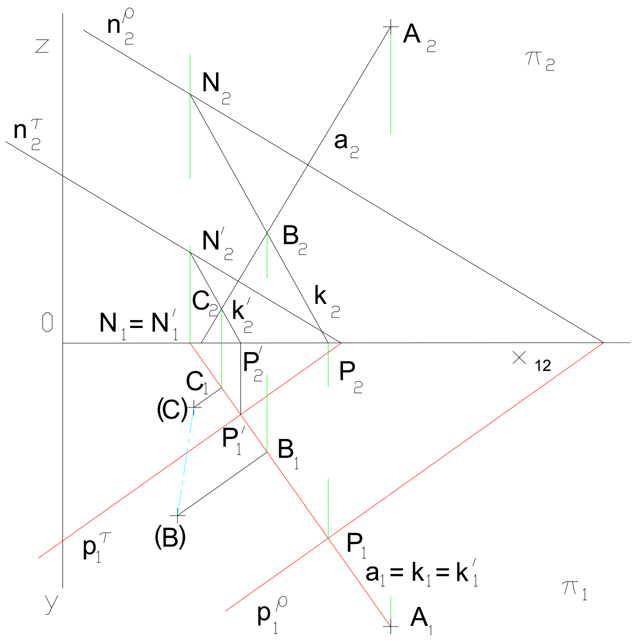
Řešení:

Z bodu A vedeme přímku a kolmou k rovině τ. Sestrojíme průsečík přímky a s rovinou τ bod B pomocí krycí přímky k. Sklopením úsečky $|AB|$ určíme skutečnou vzdálenost bodu A od τ.

4.2 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

Úloha:

Sestrojte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\tau(7, 5, 4.5)$ a $\rho(14, ?, ?)$.



Rozbor:

Vzdálenost rovin je dána vzdáleností průsečíků libovolné kolmé přímky k rovinám.

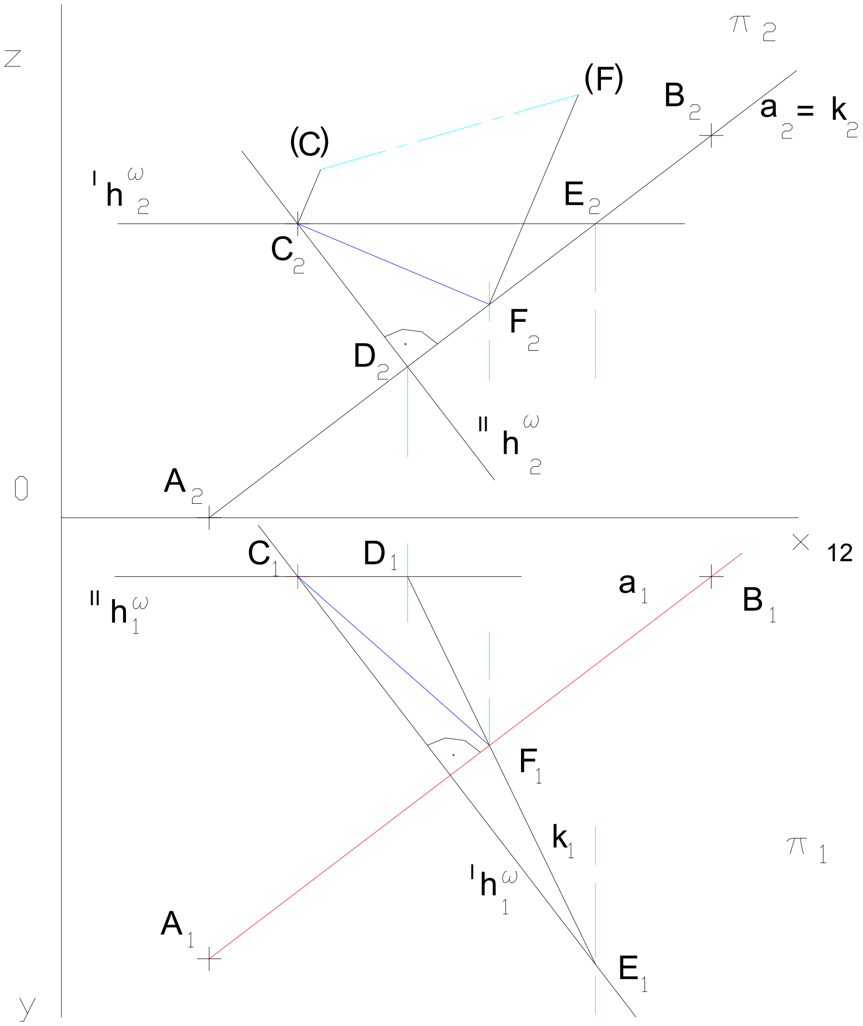
Řešení:

Libovolně si zvolíme bod A, kterým vedeme přímku a kolmou k rovinám τ a ω. Sestrojíme průsečíky přímky a a daných rovin - body B a C. K sestrojení použijeme krycí přímky k a k'. Sklopením úsečky $|BC|$ zjistíme skutečnou vzdálenost rovin.

4.3 Vzdálenost bodu a přímky

Úloha:

Sestrojte vzdálenost bodu $C(4, 1, 5)$ od přímky $a = AB$. $A(2.5, 7.5, 0)$, $B(11, 1, 6.5)$



Rozbor:

Vzdálenost bodu od přímky je nejkratší spojnice bodu a přímky – tj. přímka kolmá z bodu C k dané přímce a. Tato přímka leží v rovině kolmé k dané přímce a a prochází bodem C. Bodem C proložíme tedy rovinu kolmou k přímce a. Sestrojíme průsečík přímky s touto rovinou. Vzdálenost bodu C od přímky je vzdálenost průsečíku a bodu C. Sestrojíme skutečnou velikost.

Řešení:

Proložíme bodem C rovinu $\omega \perp a$. Rovinu sestrojíme pomocí hlavních přímek této roviny, které vedeme bodem C. Použijeme hlavní přímky prvé i druhé osnovy. Hlavní přímky se v jednom průmětu jeví kolmé k průmětu přímky a. Sestojíme průsečík přímky a s rovinou $\omega = {}^{I}h^{\omega}\,{}^{II}h^{\omega}$. Použijeme krycí přímku $a_2 = k_2$. Tím určíme bod F a můžeme sestrojit úsečku $|CF|$ - průměty vzdálenosti bodu C od přímky a. Sklopením určíme skutečnou velikost $|CF|$.

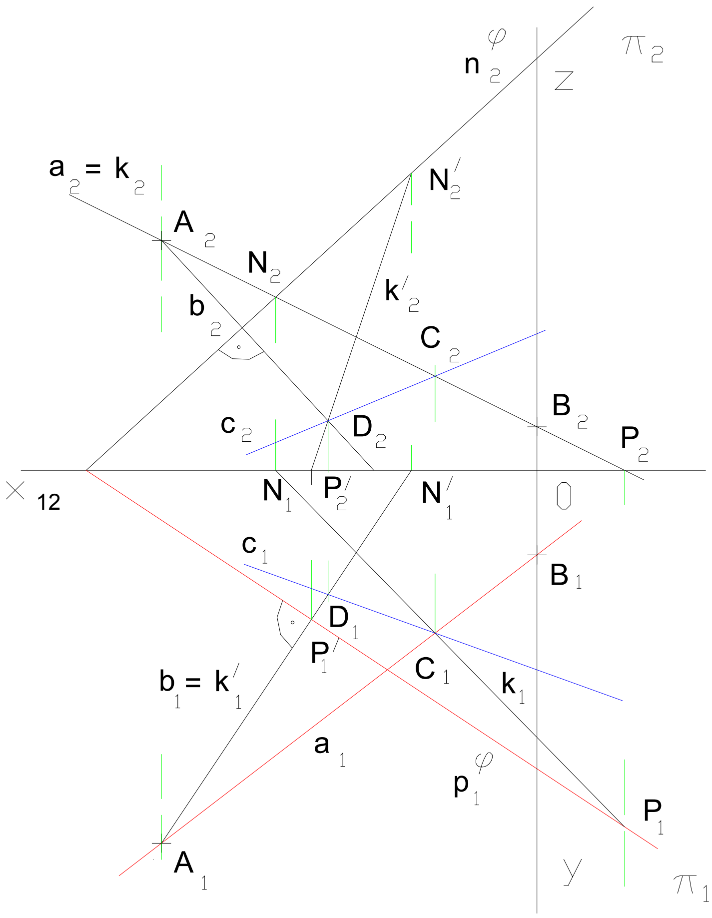
Obdobně bychom postupovali v případě, kdy máme sestrojit přímku kolmou z daného bodu k dané přímce.

4.4 Rovina procházející danou přímkou a kolmá k dané rovině.

Tato úloha je potřebná u mnoha dalších konstrukcí – např. při zjištění úhlu přímky a roviny atd. Zpravidla není nutné sestrojit stopy roviny kolmé. Rovinu kolmou můžeme znázornit též pomocí dvou přímek. Pak je úloha velmi jednoduchá. Abychom lépe znázornili vztah obou rovin, sestrojíme jejich společnou přímku - průsečnici.

Úloha:

Proložte danou přímkou $a = AB$ rovinu kolmou τ k dané rovině $\varphi(-8.5, 5.5, 7.5)$. Sestrojte průsečnici těchto rovin. $A(-7, 7, 4.5)$, $B(0, 1.5, 1)$



Rozbor:

Ze stereometrie víme, že dvě roviny jsou na sebe kolmé tehdy, jestliže v jedné z rovin je přímka kolmá k rovině druhé. Řešení je tedy jednoduché. Na zadané přímce si zvolíme bod, kterým vedeme přímku kolmou k dané rovině a tím je příklad vyřešen, protože kolmá rovina je dána dvěmi přímkami. Stopy roviny můžeme sestrojit pomocí stopníků těchto přímek. Zajímá nás ale spíše společná přímka - průsečnice – obou rovin. Sestrojíme průsečíky dané přímky a přímky kolmé k rovině a tyto body určují průsečnici.

Řešení:

Z bodu A vedeme přímku $b \perp \varphi$. Nevyhovuje-li k sestrojení kolmice bod A, je možné si na přímce a zvolit libovolný jiný bod. Rovina je určena pomocí různoběžných přímek, platí tedy $\boldsymbol{\tau = ab}$. K sestrojení průsečnice využijeme průsečíky přímky a a b s rovinou φ. Pomocí krycí přímky $k_2 = a_2$ sestrojíme průsečík $C = a \cap \varphi$ a pomocí $k_1' = b_1$ sestrojíme průsečík $D = b \cap \varphi$. Průsečnice roviny φ a τ přímka $c = DC$.

Tuto konstrukci můžeme použít k určení úhlu mezi přímkou a rovinou – viz 3.5. Do roviny π_1 nebo π_2 otočíme přímku a a průsečnici c.

5. Řezy hranatými tělesy

Řez je vztah mezi tělesem a rovinou řezu. Je to množina všech bodů, které jsou společné rovině řezu a tělesu. Ale obvykle nás zajímají pouze hrany tělesa vzniklé řezem. Zde je nutné si uvědomit návaznost na technické kreslení, kdy pomocí řezů zobrazujeme dutá tělesa.

Jakým způsobem provádíme konstrukci řezu:

1. Sestrojíme průsečíky hran tělesa s rovinou řezu a spojením vytvoříme řeznou plochu. K řešení řezu využíváme metodu průsečíku přímky s rovinou.
2. Určíme průsečnice stěn tělesa s rovinou řezu. V tomto případě využíváme afinity u hranolů a kolineace u jehlanů.

Obě metody vhodně kombinujeme tak, aby konstrukce byla přehledně provedena. Volba metody je též závislá na rovině řezu, která může být:

- Kolmá k některé průmětně – potom je vhodné použití průsečíků hran
- Obecně položená rovina – sestrojíme průsečík jedné hrany a pomocí afinity u hranolů (kolineace u jehlanů) sestrojíme průsečnice stěn tělesa.

Z toho plyne, že musíme uvážit, jaká konstrukce je pro daný případ nejvhodnější jak z hlediska přehlednosti, tak z hlediska přesnosti. V dalších kapitolách si zobrazíme jednotlivé způsoby řešení řezů hranatých těles.

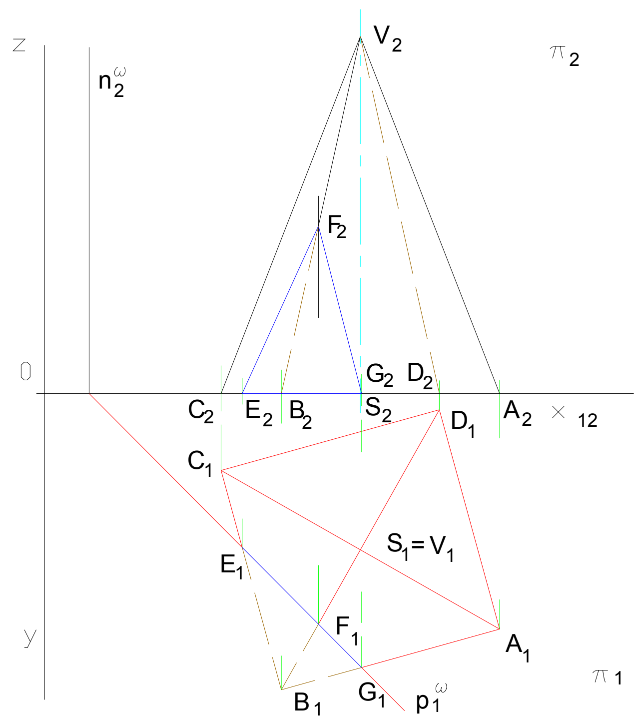
5.1 Řezy jehlanu

5.1.1 Řez jehlanu rovinou kolmou k průmětně

Jestliže máme sestrojit řez jehlanu rovinou kolmou, jedná se obvykle o velmi jednoduchou úlohu. V jednom průmětu se promítá řezná rovina jako přímka a řezná plocha se tedy promítá jako úsečka ležící na této přímce - stopě roviny. V dalším průmětu vidíme obrazec, který vznikne řezem. Není podstatné ke které průmětně je rovina kolmá. Zpravidla řešíme tuto úlohu jako průsečíky hran s rovinou. Z průmětu, kde se rovina promítá jako přímka převedeme průsečíky jednotlivých hran do druhého průmětu pomocí ordinál.

Úloha:

Sestrojte řez přímým čtyřbokým jehlanem rovinou ω.(1, -1, ∞). Podstava jehlanu je čtverec se středem S(7, 3.5, 0), vrcholem čtverce A(10, 5, 0). Vrchol jehlanu V(7, 3.5, 8).



Řešení:

V prvém průmětu se promítá rovina řezu ω jako přímka a řezem je trojúhelník EFG, který se promítá jako úsečka. Pomocí ordinál převedeme body do π_2.

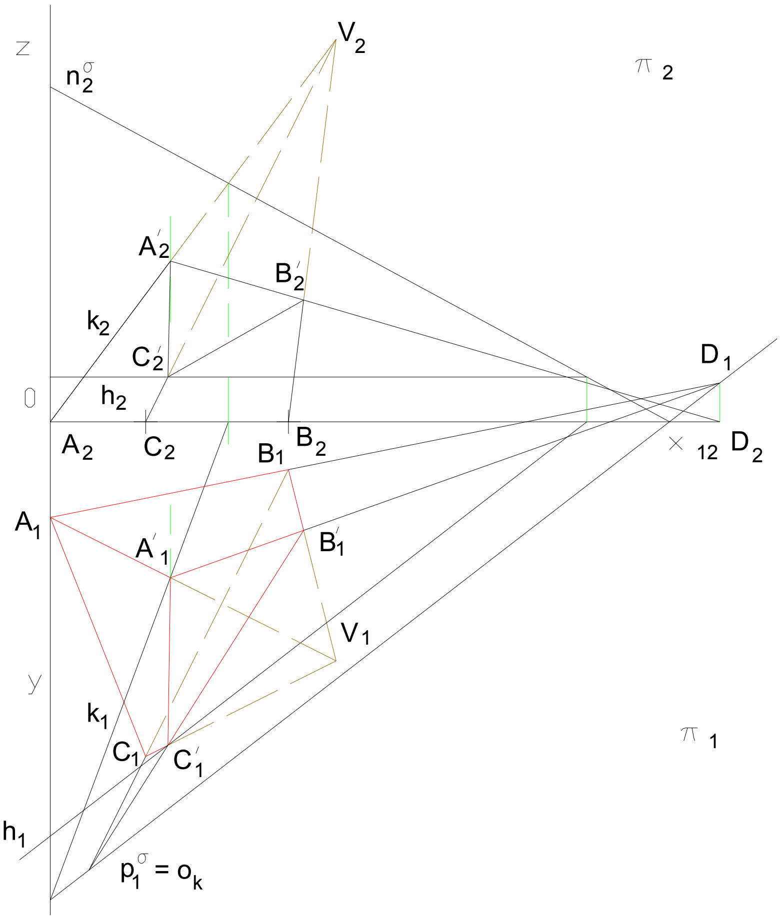
Může se stát, že konstrukce pomocí ordinál nevyhovuje z hlediska přesnosti. Jedná se především o rovinu kolmou k π_2. Potom musíme zvolit u některých hran řezu konstrukci jinou.

5.1.2 Řez jehlanu obecnou rovinou

Jak již bylo uvedeno v předchozím, obvyklý způsob řešení je sestrojení průsečíku jedné hrany jehlanu s rovinou, kde použijeme krycí přímku. Pro sestrojení průsečnice stěn a průsečíků dalších hran použijeme kolineaci. Osa kolineace je průsečnice odpovídajících rovin – podstavy a roviny řezu – tj. půdorysná stopa roviny řezu.

Úloha:

Sestrojte řez tříbokým jehlanem rovinou $\sigma(13,\ 10,\ 7)$. Podstava jehlanu je trojúhelník ABC, $A(0, 2, 0)$, $B(5, 1, 0)$, $C(2, 7, 0)$. Vrchol jehlanu $V(7, 5, 8)$.



Rozbor:

Pro sestrojení průsečíku hrany jehlanu s rovinou řezu volíme hranu, kde bod proniku vyjde nejdále od osy kolineace, tj. hranu AV. Další hledisko je též přesnost polohy bodu. Chybná volba by byla z tohoto hlediska hrana BV.

Řešení:

Zkonstruujeme průsečík hrany AV s rovinou σ. Volíme $A_2V_2 = k_2$. Sestrojíme k_1 a je určen bod $A_1{}'$.

Pro konstrukci $B_1{}'$ a $C_1{}'$ použijeme kolineaci. Osu kolineace o_k si musíme o něco prodloužit, abychom dostali průsečík odpovídajících přímek bod D_1.

K převodu bodu C' z π_1 do π_2 použijeme hlavní přímku (přesnější konstrukce než pomocí ordinály). K převodu $B_1{}'$ použijeme úsečku $A'D$, která leží v rovině σ. Přímka $A_1{}'D_1$ a přímka $A_2{}'D_2$ jsou přímky incidentní, neboli ležící v rovině σ.

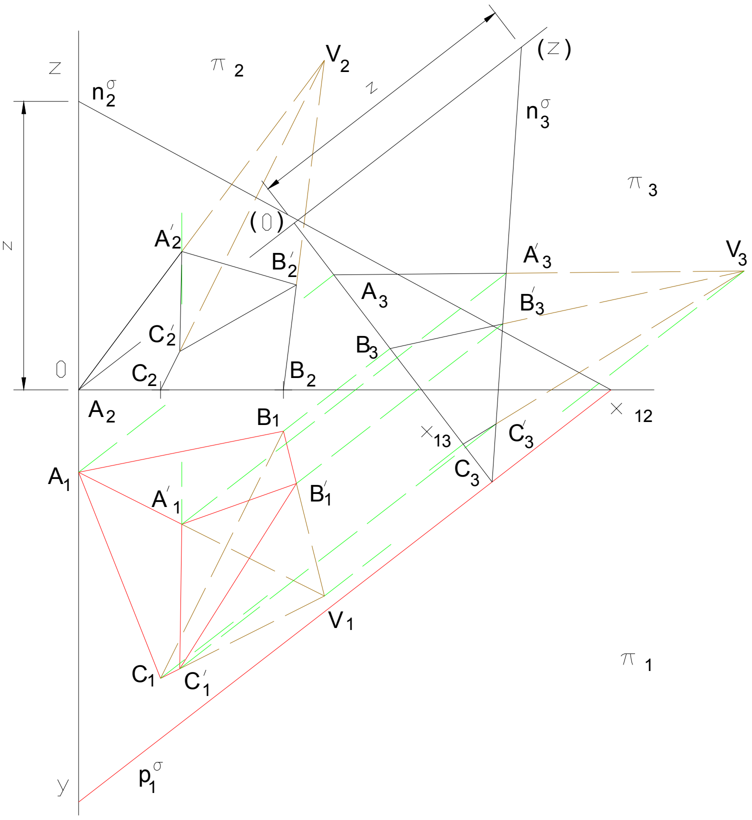
Tuto úlohu můžeme též řešit pomocí **třetího průmětu**. Nejedná se zde o bokorys, ale o třetí průmětnou rovinu, kterou si volíme jako rovinu kolmou k rovině řezu. Úlohu volíme stejnou.

Rozbor:

Úlohu převádíme na úlohu řez jehlanem rovinou kolmou k průmětně – 5.1.1. Konstrukce je poměrně jednoduchá, ale vyžaduje větší zkušenost a představivost.

Řešení:

Zavedeme si třetí rovinu, která je kolmá na rovinu řezu σ. Rovinu umístíme tak, aby obraz nezasahoval do zobrazení prvého a druhého průmětu. Zvolíme si proto vhodně $(x) \perp p_1{}^{\sigma}$ a sestojíme sklopený obraz jehlanu v této rovině. Řez se zde jeví jako úsečka $A_3'C_3'$. Pomocí promítacích paprsků odvodíme prvý a druhý průmět řezu.



Zhodnocení:

Konstrukce je poměrně jednoduchá, ale náročnější na představivost a hlavně na velikost kreslící plochy. V některých případech je ale velmi výhodná – jestliže je rovina řezu rovnoběžná s osou x_{12}.

5.1.3 Síť seříznutého jehlanu

Povrch tělesa rozvinutého do roviny se nazývá síť. Zde se již dostáváme k praktickému využití DG, protože u plechových konstrukcí ve strojírenství musíme sestrojit sítě těles, převést je na plech, vystřihnout a následně svařit nebo jiným způsobem spojit. Dříve ale někdy i nyní se to provádí konstrukčním způsobem. V současnosti můžeme využít výpočetní techniky a kreslících programů, které umí vytvořit síť tělesa (ovšem prostorově nakresleného). Vytvořenou síť v digitální formě můžeme využít v programově řízených strojích, které z plechu vyříznou žádané tvary. Po dalším zpracování – ohýbání, svaření nebo slepení máme dané těleso vytvořené z plechu.
Co se týká sítí, konstruujeme sítě hranatých i rotačních těles obdobným způsobem. Zjistíme skutečné velikosti podstav a zkonstruujeme plášť. K rozvinutému plášti potom podstavy připojíme.

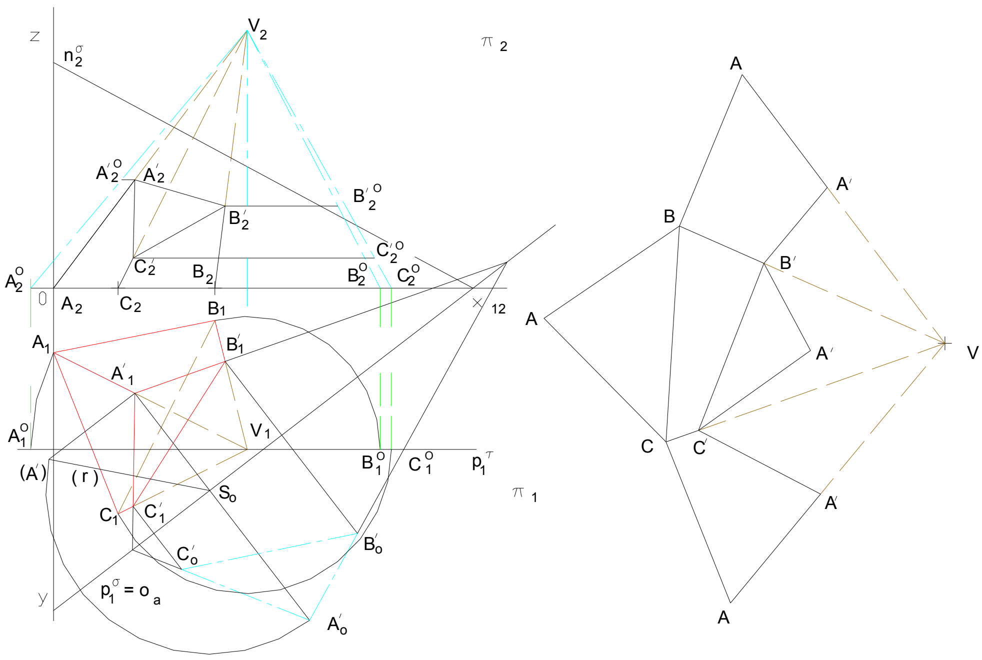
Doporučení:

Zkonstruujte si síť některého seříznutého jehlanu nebo hranolu, u kterého provedete řez. Přeneste tuto síť na čtvrtku a slepením vytvořte model. Procvičíte se nejen v manuální zručnosti, ale též uvidíte praktický výsledek své práce v DG a uvidíte, jak jste při konstruování přesní. Uvědomte si, že takovéto jednoduché sítě musí umět vytvořit každý klempíř (i když má znalosti DG podstatně menší). Dejte si při lepení pozor, abyste model správně slepili! Při nepozornosti lepení modelu dostanete model zrcadlově seříznutý oproti zadané konstrukci seříznutého tělesa!

Úkol:

Sestrojte síť seříznutého jehlanu – příklad z 5.1.2.

Pozn.Řešíme-li úlohu konstrukčně, kreslíme vše do jednoho obrázku.



Rozbor:

Řez jehlanu již máme zkonstruován a nebudeme se ke konstrukci vracet. Některé konstrukce již byly probrány – bude odkaz na příslušné kapitoly. Podstava jehlanu leží v π_1, je tedy ve skutečné velikosti. Skutečnou velikost seříznuté plochy musíme zkonstruovat. Konstrukci provedeme afinitou – viz. 3.3. Skutečnou velikost hran jehlanu sestrojíme otočením (sklopením). Otočení můžeme provést do roviny π_1 nebo π_2 – viz 2.5 skutečná velikost úsečky. Konstrukce je ale méně přehledná. Můžeme též sklopit do roviny rovnoběžné s průmětnami. Nejvýhodnější je otočení do roviny rovnoběžné s π_2. Osa otáčení je kolmá k π_1 a prochází vrcholem jehlanu. Tím jsou určeny skutečné velikosti všech prvků a je možné sestrojit síť tím způsobem, že přenášíme jednotlivé trojúhelníky pláště.

Řešení:

Afinitou sestrojíme $A_0'\ B_0'\ C_0'$. Osa afinity $o_a = p_1^{\sigma}$, protože půdorysná stopa je průsečnicí roviny řezu, v které leží obrazec $A'B'C'$ a π_1, do které budeme obrazec otáčet. Pro afinitu musíme sestrojit odpovídající bod – otočíme bod A'. Bod A' použijeme z toho důvodu, že je nejdále od osy afinity – osy otáčení. Kružnice otáčení se jeví jako přímka kolmá k ose otáčení - půdorysné stopě. Střed otáčení bodu A' je bod S_o, poloměr $r = |A'S_0|$. Sklopením do π_1 určíme velikost kružnice otáčení. Kde se sklopená kružnice protne s přímkou A'_1S_0, leží otočený bod A_0'. Ostatní body již zkonstruujeme známým způsobem pomocí afinity – viz 3.3.

Sestrojení skutečné velikosti hran $|AA'|$, $|BB'|$ a $|CC'|$ provedeme otočením do roviny τ, která je rovnoběžná s π_2. Rovina τ prochází vrcholem jehlanu V. Osa otáčení je kolmá k π_1. Kružnice otáčení bodů A, B, C vidíme v prvém průmětu. Bod A má poloměr kružnice otáčení $|A_1V_1|$, body B a C se otáčí obdobně. V druhém průmětu se kružnice otáčení těchto bodů promítají do osy x_{12}. Otočené body A_1^0, B_1^0 a C_1^0 převedeme do druhého průmětu - body A_2^0, B_2^0, C_2^0. Úsečky $|A_2^0V_2|$, $|B_2^0V_2|$ a $|C_2^0V_2|$ jsou skutečné délky hran jehlanu. Na tyto hrany otočíme body A', B', C'. Pro toto otáčení již není nutné konstruovat kružnice otočení v prvém průmětu, ale můžeme tyto kružnice sestrojit v druhém průmětu, kde se jeví jako úsečky rovnoběžné s x_{12}. Stačí převést body na skutečné délky hran. Tím jsou zkonstruovány délky $|AA'|$, $|BB'|$ a $|CC'|$.

Po sestrojení všech skutečných velikostí můžeme začít konstruovat plášť seříznutého jehlanu, což je přenášení a konstrukce trojúhelníků, u kterých máme určeny délky stran.

5.2 Řez hranolem

Konstrukce řezu hranolem je obdobná, jako u řezu jehlanu s tím rozdílem, že pro konstrukci řezné plochy používáme afinitu místo kolineace. Tuto metodu používáme především u šikmých hranolů. Řez muže být velmi jednoduchý (triviální) v případě, že se jedná o hranol přímý. K sestrojení můžeme použít též třetí průmět obdobně jako u jehlanu.

5.2.1 Řez přímým hranolem

Přímý hranol můžeme rozříznout rovinou kolmou k některé z průměten. Mohou nastat dva případy:

1. Rovina kolmá k π_1 – v prvém průmětu se plocha řezu jeví jako úsečka totožná s půdorysnou stopou roviny řezu a omezená hranami podstavy, v druhém jako obdélník, který zkonstruujeme pomocí ordinál.
2. Rovina kolmá k π_2 – v prvém průmětu je plocha řezu shodná a postavou, v druhém průmětu se jeví jako úsečka shodná se stopou roviny řezu a omezená hranami hranolu.

Tyto konstrukce jsou velmi jednoduché a jistě si řez dokážete bez problémů představit.

Trochu složitější je řez **obecnou rovinou**.

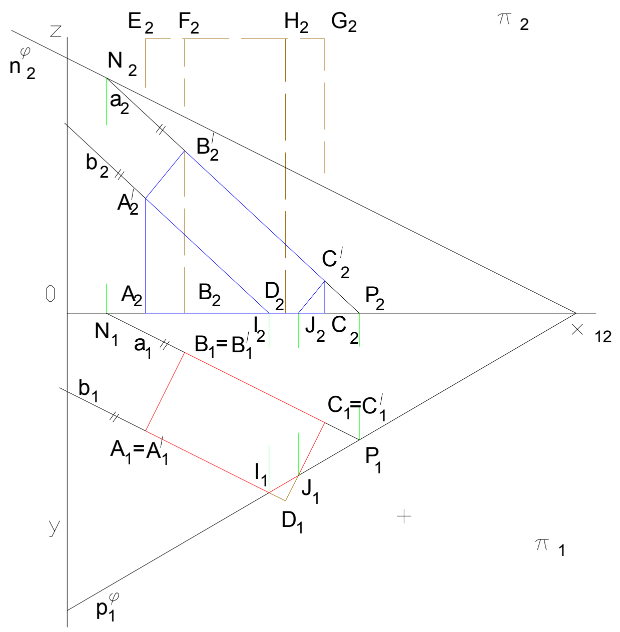
Úloha:

Sestrojte řez přímým hranolem *ABCDEFGH*. Zadání – podstava obdélník *ABCD*, *A*(2, 3, 0), *B*(3, 1, 0), $|AC| = 4$, výška v = 7. Rovina řezu φ(13, 7.5, 6.5).

Rozbor:

Konstrukci je opět možné provést několika způsoby, protože body roviny řezu jsou v jednom průmětu shodné s body podstavy hranolu. Nejjednodušší způsob je zvolen v provedené konstrukci. V rovinách pláště zvolíme přímky, které jsou společné i rovině řezu (možné říci i průsečnice rovin). Tyto přímky určí průsečíky jednotlivých hran s rovinou řezu. Druhá možnost je využití hlavních přímek první osnovy vedených body *A´, B´, C´*.

Je možné též použít třetí průmět – do roviny kolmé na rovinu řezu φ. Konstrukce je ale složitější (uvedena [1], [2]).



Řešení:

V rovině pláště *BCF* sestrojíme v prvém průmětu přímku *a*, která leží v rovině řezu φ. Sestojíme stopníky přímky *a* - P_1 a N_1. Sestrojíme druhý průmět stopníků a druhý průmět přímky *a*. Tato přímka určuje průsečíky hran *BF* a *CG* s rovinou řezu φ - body *B´*a *C´*.

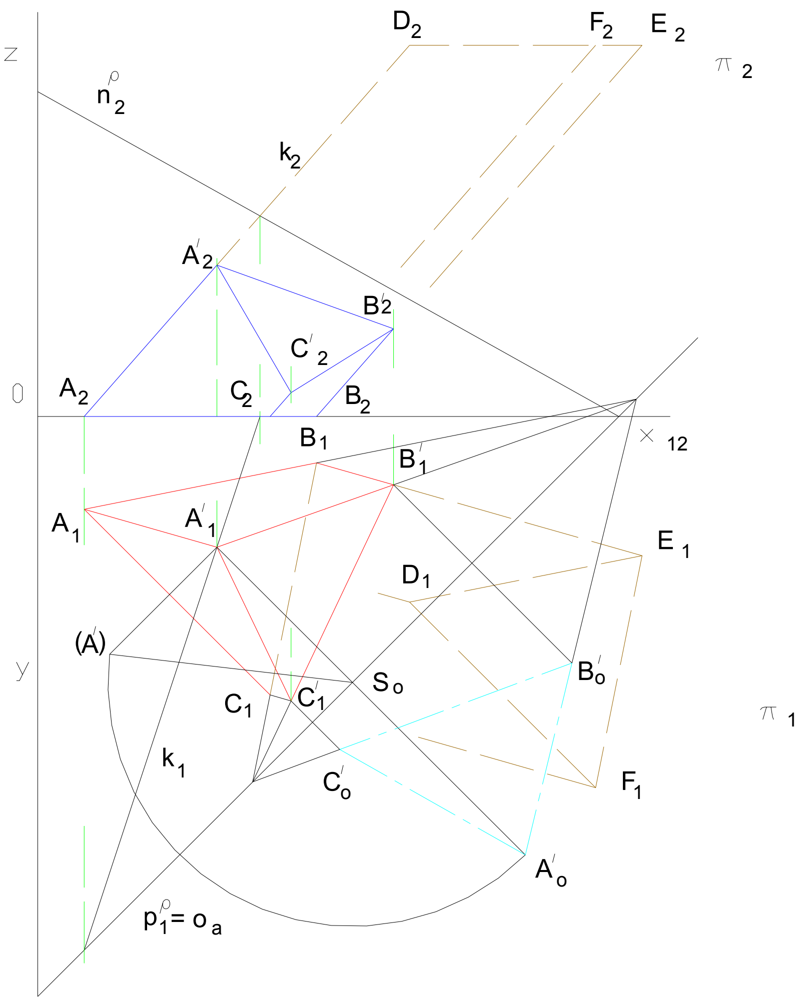
V rovině *ADE* můžeme sice určit půdorysný stopník přímky *b* – shodný s *I*, ale obtížně nárysný stopník. Zde opět využijeme znalostí ze stereometrie. Rovina *ADE* je rovnoběžná s rovinou *BCF*. Tyto roviny jsou protnuty rovinou třetí - φ. Průsečnice jsou rovnoběžné. Proto přímka *b* je ve všech průmětech rovnoběžná s *a*. Přímka *b* v druhém průmětu určí bod *A´*. Řez podstavou – body *I* a *J* jsou dány průsečíky p_1^{φ} s hranami podstavy hranolu.

5.2.2 Řez šikmým hranolem obecnou rovinou

Řez můžeme konstruovat buď pomocí afinity, nebo pomocí třetího průmětu.

Úloha:

Sestrojte řez šikmým tříbokým hranolem *ABCDEF* rovinou ρ(12.5, 12.5, 7). *A*(1, 2, 0), *B*(6, 1, 0), *C*(5, 6, 0), *D*(8, 4, 8). Sestrojte skutečnou velikost plochy řezu.



Rozbor:

K sestrojení řezu použijeme afinitu. Sestrojíme nejprve průsečík jedné hrany s rovinou řezu, což bude pro afinitu odpovídající bod. Osa afinity je dána průsečnicí roviny podstavy a roviny řezu. Směr afinity určují hrany hranolu. Nejedná se zde o pravoúhlou afinitu, ale afinitu obecnou.

Sestrojení skutečné velikosti plochy řezu provedeme otočením plochy řezu do π_1. Otočíme jeden z vrcholů trojúhelníku plochy řezu a získáme odpovídající bod. Ostatní body sestrojíme pomocí afinity. Osa afinity o_a je půdorysná stopa p_1^{ρ}. Používáme afinitu pravoúhlou.

Řešení:

Pomocí krycí přímky *k* sestrojíme průsečík hrany *AD* s rovinou ρ. Krycí přímku volíme tak, aby bod, který získáme, byl nejdále od osy afinity. Krycí přímku volíme $k_2 = A_2D_2$. Sestrojíme bod plochy řezu A_1' a dále konstruujeme plochu řezu pomocí obecné afinity.

Pro konstrukci skutečné velikosti plochy řezu musíme otočit bod A_1' do π_1. Konstrukce je stejná jako u sestrojení skutečné velikosti plochy řezu u jehlanu.

Konstrukce sítě šikmého hranolu je obdobná, jako sítě u jehlanu s tím rozdílem, že v ploše pláště hranolu musíme sestrojit úhlopříčky a jejich skutečnou velikost. U šikmých hranolů jsou stěny kosoúhelníky. Přenášet je musíme rozdělením na dva trojúhelníky.

U přímých hranolů je konstrukce sítě jednoduchá, protože plocha pláště se skládá z obdélníků.

6. Průsečík přímky s tělesy

Vzájemná poloha přímky a povrchu tělesa může být taková, že:

1. Přímka nemá s povrchem tělesa žádný společný bod – tělesem neprochází.
2. Přímka má s povrchem tělesa (i s tělesem samotným) jeden společný bod – tělesa se dotýká. U hranatých těles prochází hranou, nebo vrcholem (podstavy nebo vrcholem jehlanu). U rotačních těles je tečnou tělesa.
3. Přímka má s povrchem dva společné body – tělesem prochází.
4. U hranatých těles může přímka ležet v některé rovinné ploše povrchu.

Z těchto všech možností nás nejvíce zajímá třetí případ, kdy přímka tělesem prochází.

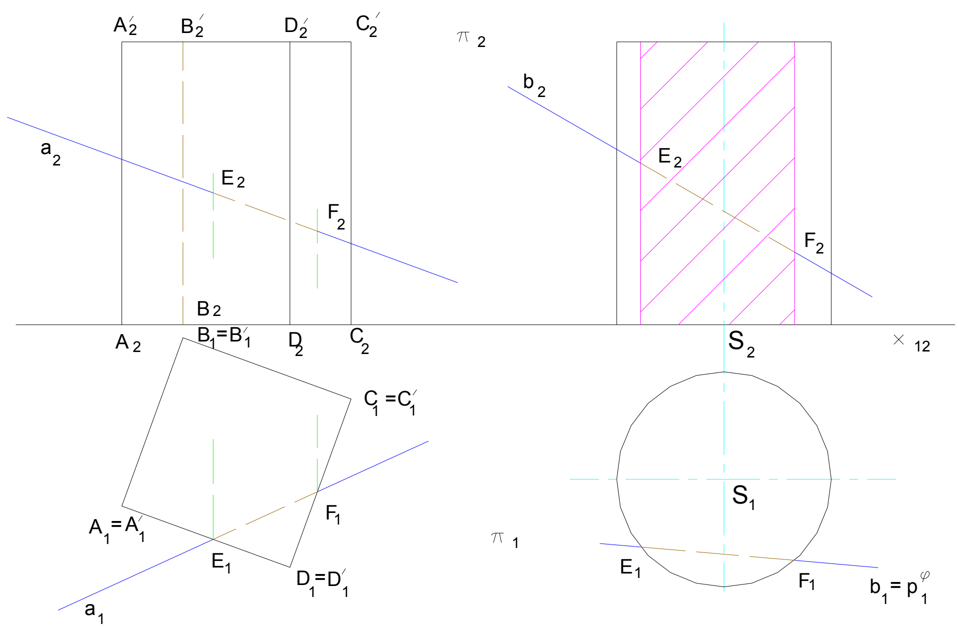
Podobně jako v mnoha úlohách DG můžeme i zde použít několik konstrukčních metod:

- **Průsečíky vidíme přímo** v některém průmětu a z toho průmětu převedeme promítacími paprsky do průmětů druhých.
- **Přímkou proložíme tzv. vrcholovou rovinu**, nebo takovou rovinu, která rozřízne těleso v jednoduché ploše – obdélník, kosodélník, trojúhelník, kružnice, atd.. Hrany řezné plochy určí průsečíky.
- **Použijeme tzv. průsečnou přímku** – hledáme průsečík přímky a rovinné plochy pláště. Průsečná přímka je obdoba krycí přímky.

Je vždy nutné určit takovou metodu, která je pro daný případ nejjednodušší a nejpřesnější. Vycházíme obvykle z typu tělesa, u kterého průsečík hledáme. U přímých těles – válců a hranolů je to metoda první. U jehlanů, kuželů, šikmých hranolů a šikmých válců je to metoda druhá. Bylo by možné použít i první metodu, ale museli bychom použít třetí průmět. Průsečnou přímku je možné použít pouze u hranatých těles.

6.1 Průsečík přímky s přímým hranolem a válcem

Máme sestrojit průsečík přímky s přímým hranolem a válcem. Úloha je jednoduchá.



Řešení:

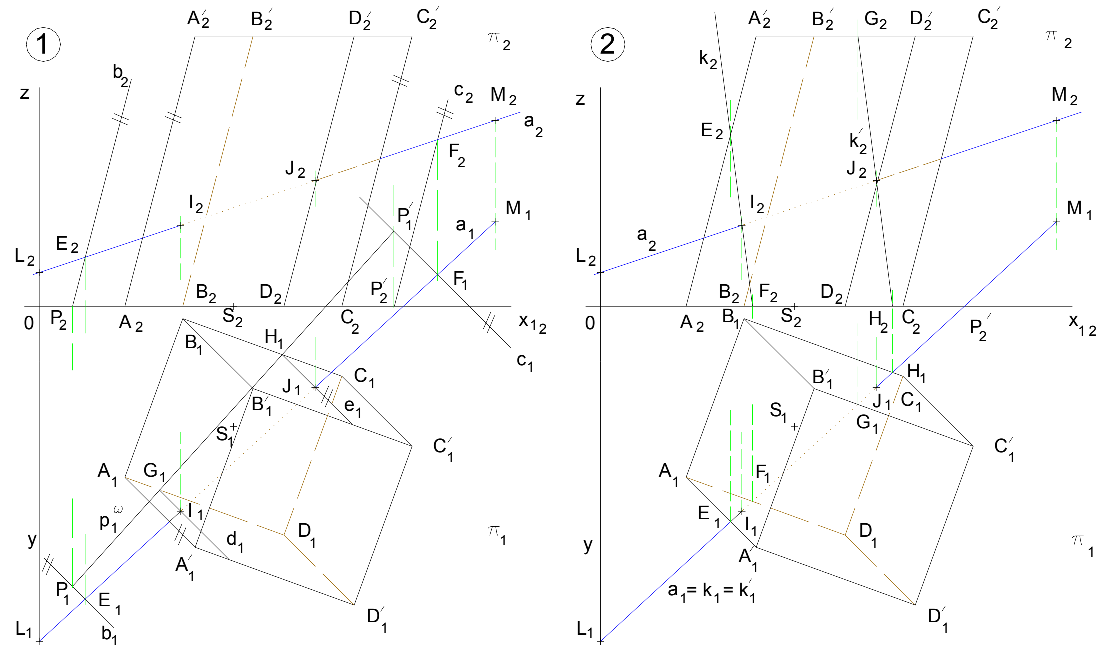
Úloha průnik přímky hranolem nepotřebuje komentář. Na průniku přímky válcem je ukázka řešení pomocí „vrcholové roviny“. Válec si můžeme představit též jako kužel s vrcholem v nekonečnu. Potom vrcholová rovina φ je rovnoběžná s osou válce a tedy kolmá k π_1. Tímto způsobem je nutné pojmout pojem vrcholové roviny u válce. Obdobně je určena vrcholová rovině hranolu. Jinak je asi zřejmé, že použití roviny je v tomto případě zbytečné.

6.2 Průsečík přímky a šikmého hranolu

Úlohu můžeme řešit buď pomocí řezu vrcholovou rovinou nebo pomocí průsečné přímky. Byla by možnost použít třetí rovinu, která by byla kolmá k ose hranolu. Bylo by to ale poměrně náročné.

Úloha:

Sestrojte průnik přímky $a = LM$ šikmým hranolem $ABCDA'B'C'D'$ s čtvercovou podstavou. Hranol je zadán $A(25, 50, 0)$, středem podstavy $S(57, 35, 0)$ a $A'(45, 70, 80)$. Body přímky $L(0, 100, 10)$, $M(135, -25, 55)$.Průnik sestrojte pomocí vrcholové roviny a pomocí průsečné přímky. Zhodnoťte obě metody. **Pozn.** Souřadnice jsou udány v mm.



1. Použití vrcholové roviny

Rozbor:

Pojmem vrcholové roviny je znám. Přímkou proložíme vrcholovou rovinu a sestrojíme řezné hrany pláštěm. Průsečíky řezných hran a přímky určují body společné body přímky a hranolu.

Řešení:

Přímkou proložíme vrcholovou rovinu ω. Na přímce a si zvolíme dva body E a F. Body vedeme rovnoběžky s hranami hranolu – přímky b a c. Body E a F volíme v takové vzdálenosti od hranolu, aby se průmět přímek b a c nepřekrýval s průmětem hranolu (z důvodu přehlednosti konstrukce). U přímek b a c sestrojíme půdorysné stopníky P_1 a P_1', které určují půdorysnou stopu vrcholové roviny ω. Protože rovina ω je rovnoběžná s hranou hranolu, je i průsečnice d_1 a e_1 rovnoběžná s hranou C_1C_1'. Průsečíky $I_1 = a_1 \cap d_1$ a $J_1 = a_1 \cap e_1$ převedeme pomocí ordinál do druhého průmětu.

Pozn.: V případě, že ordinála by byla nepřesná, můžeme použít libovolnou přímku v rovině pláště, která prochází daným průsečíkem. To se týká všech konstrukcí průsečíku přímky s hranatými tělesy.

2. Použití průsečné přímky

Rozbor:

Konstruujeme vlastně průsečík přímky a roviny. Rovina je dána pláštěm hranolu. Musíme mít představu o poloze přímky a tělesa a odhadneme rovinu plochy pláště, v které je průsečík. Rovina je dána v tomto případě kosodélníkem. Volíme si vhodně průsečnou přímku (jak zde nazýváme přímku krycí).

Řešení:

Předpokládáme, že přímka a protne plášť v rovině *ADA´*. Volíme krycí přímku $k_1 = a_1$, která leží v rovině *ADA´*. Hranu $A_1A_1´$ protíná k_1 v bodě E_1 a hranu podstavy A_1D_1 v bodě F_1. Body přeneseme pomocí ordinál do druhého průmětu a sestrojíme k_2, která nám určí společný bod přímky *a* a roviny *ADA´* bod *I*. Obdobně postupujeme i v další rovině pláště hranolu *BCB´*.

Zhodnocení:

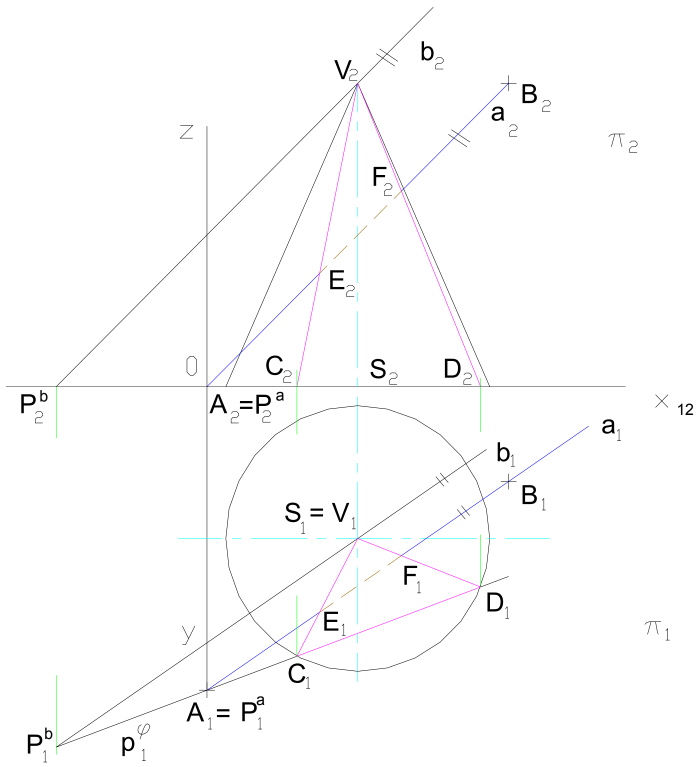
Metoda pomocí řezných rovin je konstrukčně náročnější, ale přesnější. Přesnost je dána tím, že není nutné využívat ordinál k sestrojení chybějících průmětů. Že konstrukce pomocí ordinál není nejpřesnější (při ručním kreslení) vidíte u konstrukce průsečíku pomocí průsečné přímky v rovině *ADA´* - bod E_2. V rovině *BCB´* jsou ordinály již lépe využitelné.

6.3 Průsečík přímky s kuželem

U rotačních těles nejčastěji používáme metodu vrcholové roviny. Vrcholovou rovinu můžeme sestrojit tak, že si na dané přímce volíme dva body, kterými vedeme přímky procházející vrcholem kužele. Sestrojíme půdorysné stopníky přímek. Jestliže ale můžeme u dané přímky zkonstruovat půdorysný stopník, můžeme vést zpravidla vrcholem kužele rovnoběžku s danou přímkou a sestrojit i tento stopník. Tak můžeme jednoduše sestrojit půdorysnou stopu vrcholové roviny a tím i trojúhelník řezu.

Úloha:

Sestrojte průsečík dané přímky $a = AB$ s kuželem. Kužel je přímý, má střed podstavy *S*(4, 4, 0) poloměr r = 3.5, výška v = 8. *A*(0, 8, 0), *B*(8, 2.5, 8)



Rozbor:

Pro konstrukci průsečíků použijeme vrcholovou rovinu, kterou si vytvoříme rovnoběžnou přímkou s přímkou danou a procházející vrcholem kužele.

Řešení:

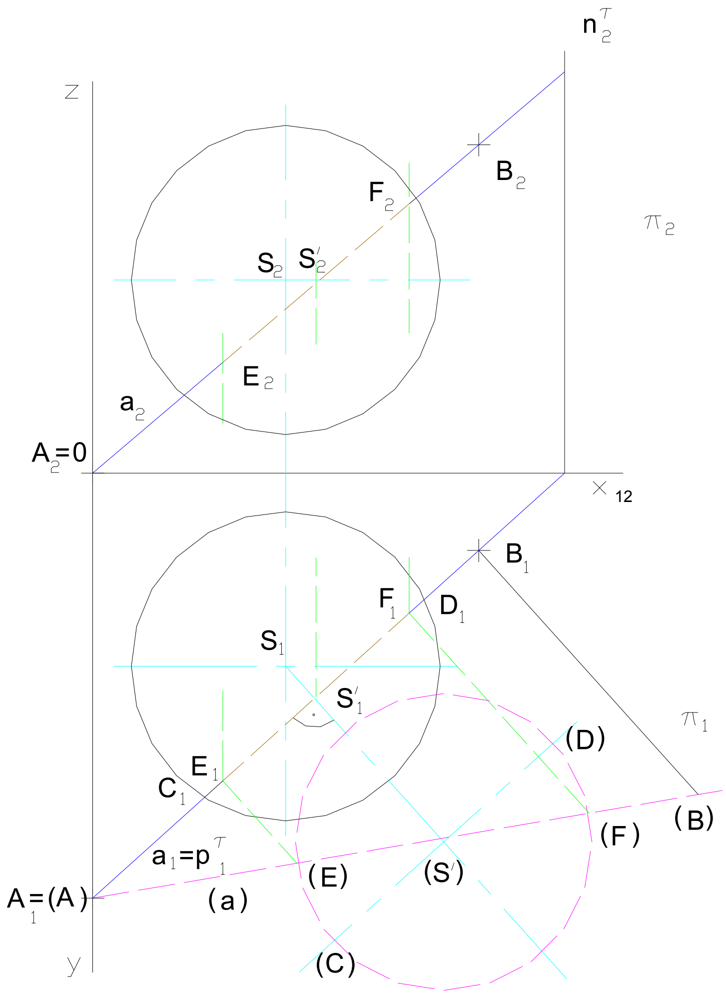
Vrcholem jehlanu vedeme přímku *b* rovnoběžnou s *a*. Sestrojíme půdorysnou stopu vrcholové roviny $\varphi = ab$. Průsečíky p_1^{φ} a kružnice podstavy kužele - body *C* a *D* určují s bodem *V* trojúhelník řezu, který na přímce *a* určí body *E* a *F*, které jsou průsečíky přímky *a* a kužele. Trojúhelník řezu je zvýrazněn fialovou barvou a je převeden i do druhého průmětu (průsečíky E_2 a F_2 by mohly být převedeny pomocí ordinál přímo).

6.4 Průsečík přímky s koulí

Průsečík přímky s koulí (pláštěm kulové plochy) řešíme opět pomocí řezné roviny. Využíváme toho, že řez koulí je vždy kružnice. Přímkou proložíme rovinu řezu kolmou k některé průmětně. Řez se jeví v jednom průmětu jako přímka, v druhém jako elipsa. Zobrazení řezu ale není nutné konstruovat. Kruhovou plochu řezu sklopíme i s danou přímkou do průmětny, ke které je rovina řezu kolmá. V tomto zobrazení vidíme průsečíky přímky s kružnicí plochy řezu. Zpětně přeneseme průsečíky do prvého a druhého průmětu.

Úloha:

Sestrojte průsečík přímky $a = AB$ s koulí se středem $S(5, 5, 5)$ a poloměrem R = 4. $A(0, 11, 0)$, $B(10, 2, 8.5)$



Úvaha o řešení úlohy byla provedena v úvodu.

Řešení:

Přímkou a proložíme rovinu τ kolmou k π_1. Řezem je kruhová plocha, která má střed S' a poloměr R = $|S_1'C_1|$. Střed S' leží na přímce kolmé k rovině τ ze středu koule S. Sklopíme kružnici řezu do π_1. Poloměr sklopení je souřadnice z sklápěného bodu S' (sklápíme obdobně jako při zjišťování skutečné délky úsečky, nebo při konstrukci skutečné velikosti obrazce v rovině kolmé k průmětně 3.3). Sklopíme též přímku a. Ve sklopení vidíme společné body přímky a kružnice řezu E a F. Tyto body sklopíme zpět do prvého průmětu a pomocí ordinály převedeme do druhého průmětu.

Viditelnost:

Bod E je na spodní straně a přední části koule. Bude viditelný v druhém průmětu a neviditelný v prvém. Bod F je na zadní části a horní straně koule. Bude tedy vidět v prvém průmětu a neviditelný bude v druhém průmětu.

Použitá literatura:

[1] Leinveber,J. a kol.: Technické kreslení pro SPŠ strojnické. 1 vydání Praha, SNTL 1984. 230 s.
[2] Švercl, J.-Vávra, J.: Technické kreslení II. 3 vydání Praha, SNTL 1981. 193 s.

Obsah: