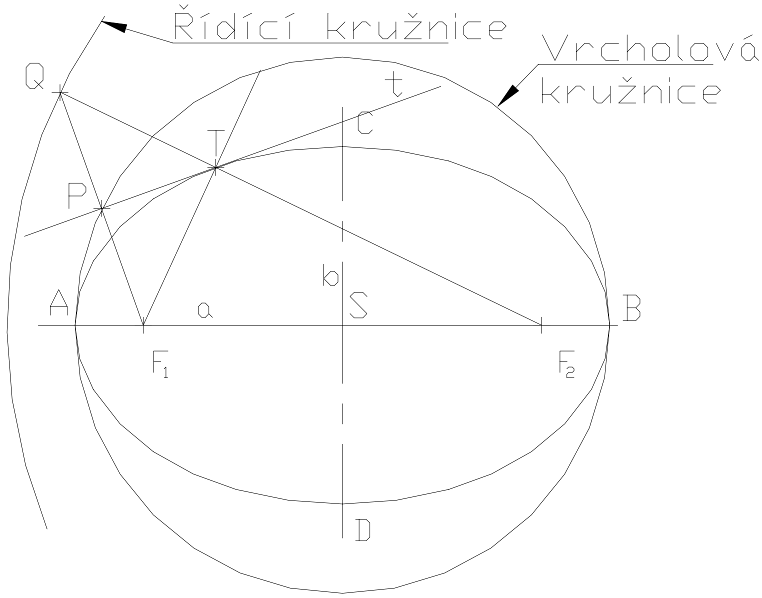
Střední průmyslová škola elektrotechnická
a Vyšší odborná škola
Pardubice, Karla IV. 13

Deskriptivní geometrie II.

Ing. Rudolf Rožec



Pardubice **2001**

Skripta jsou určena pro předmět deskriptivní geometrie III. ročníku technického lycea. Odpovídají osnovám předmětu a je proto možné využití na všech školách se zavedeným technickým lyceem. Budou jistě i dobrou pomůckou pro zopakování deskriptivní geometrie u žáků, kteří mají maturitní zkoušku z technické grafiky.

Recenze : Mgr. Pavel Vohradník

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

1 Kuželosečky

Řezy na přímém kuželu a druhy řezů

Nejednodušší řez kuželem je řez **vrcholovou rovinou**, kdy rovina řezu prochází vrcholem kužele a protíná podstavu kužele. Řezem je **trojúhelník**, jehož jeden vrchol je vrchol kužele a dva jsou body podstavy. Prochází-li rovina řezu zároveň osou, řez nazýváme **řez osový**.

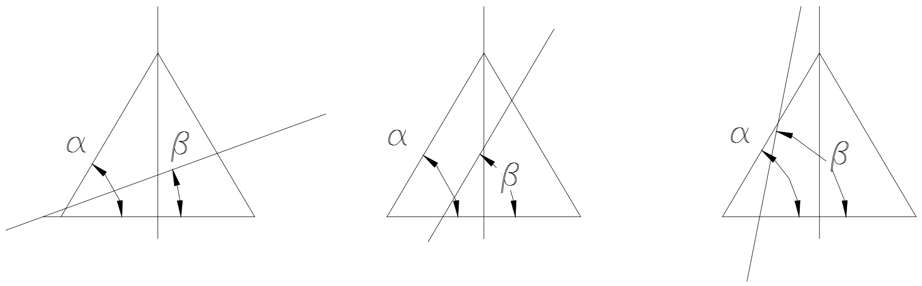
Dalším jednoduchým řezem je **řez rovinou rovnoběžnou s podstavou kužele**. Řezem je **kružnice.** Tento typ řezu používáme velmi často k sestrojení bodů řezu jinou rovinou, nebo při konstrukci průniků těles.

Ostatní roviny řezu vytváří křivky. Jedná se o řez **eliptický**, **parabolický** a **hyperbolický**.

Eliptický řez nastává tehdy, jestliže úhel roviny řezu s podstavou $\beta \langle \propto$ - úhel povrchové přímky. Je možné i jiné vyjádření - jestliže vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu neprotíná žádnou povrchovou přímku.

Parabolický řez nastává tehdy, jestliže úhel roviny řezu $\beta = \propto$. Nebo - jestliže vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu se dotýká povrchové přímky.

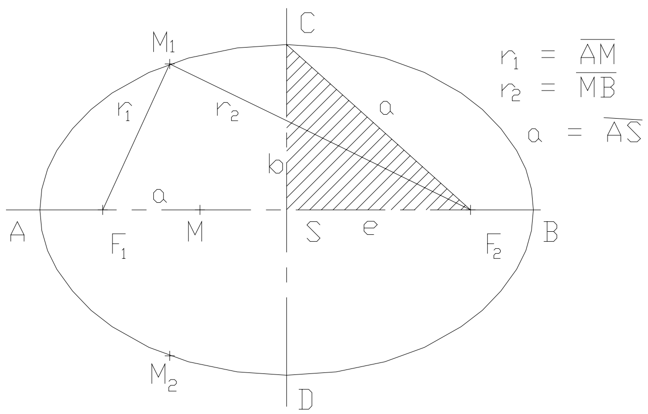
Hyperbolický řez nastává tehdy, jestliže úhel roviny řezu $\beta \rangle \propto$. Nebo - jestliže vrcholová rovina rovnoběžná s rovinou řezu prochází dvěma povrchovými přímkami.



řez eliptický   řez parabolický   řez hyperbolický

2 Elipsa

Definice: Elipsa je geometrické místo bodů, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností, který je roven délce hlavní osy.



Ohniska značíme obvykle F_1 a F_2. Vzdálenosti od ohnisek nazýváme průvodiče r_1 a r_2 . Hlavní osa je ohraničena body A a B, vedlejší B a C.

Podle definice můžeme zkonstruovat elipsu - konstrukci říkáme **průvodičová**. Z konstrukce. vyplývá, že ke každému bodu M_1 existuje souměrně sdružený bod - podle osy AB - bod M_2, obdobně podle svislé osy další dva body.

Vzdálenost ohniska od středu elipsy se nazývá **excentricita**, neboli **lineární výstřednost elipsy**. Hodnotu **e** je možné vypočítat z pravoúhlého trojúhelníka

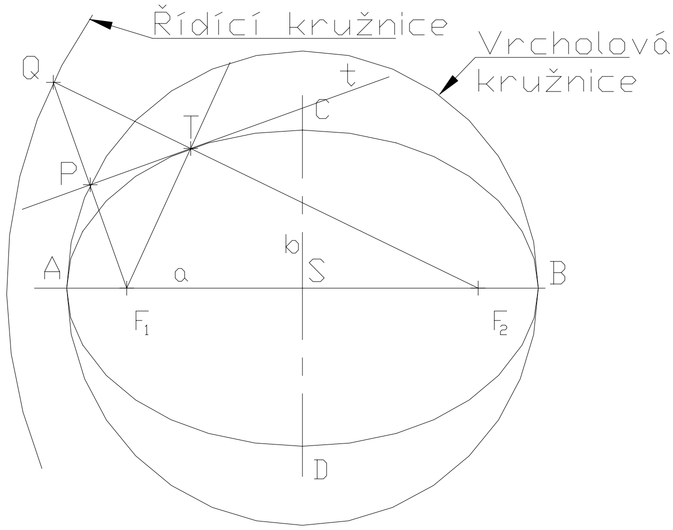
$$a^2 = b^2 + e^2$$

Tento trojúhelník se nazývá **charakteristický trojúhelník elipsy**.

2.1 Přímka a elipsa

Přímka a elipsa mohou mít tři vzájemné polohy:

1. přímka elipsu neprotíná, tzv. vnější přímka - nemá žádný společný bod
2. přímka protíná elipsu a má společné dva body. Přímka se potom nazývá sečnou a její část mezi body tětivou - podobně jako u kružnice.
3. přímka se elipsy dotýká - má společný jeden, dotykový bod T. Přímka se nazývá tečna elipsy.



Definice:

Tečna půlí vnější úhel průvodičů.

Normála je kolmice na tečnu v bodě dotyku a půlí vnitřní úhel průvodičů. Normála u elipsy ale není významná.

Vedeme-li z ohniska F_1 kolmici na tečnu, dostaneme na tečně patu kolmice - bod P. Můžeme sestrojit bod souměrně sdružený k ohnisku - bod Q. Body P i Q leží na kružnicích, které se nazývají **vrcholová** a **řídící**. Dále - patrné z obrázku - platí, že :

$F_2\,T + TQ = 2a$, protože $TQ = TF_1$

Definice:

Řídící kružnice je množinou všech bodů Q souměrně sdružených k ohnisku podle tečny. Poloměr je <u>2a</u> a střed je v druhém ohnisku elipsy.

Dále platí **definice**:

Na vrcholové kružnici jsou paty kolmic P, které jsou vedeny z ohniska k tečně. **Poloměr kružnice je <u>a</u>. Střed vrcholové kružnice je v bodě S.**

Užití - používáme k zjištění parametrů elipsy, která není zadána standardně pomocí os.

2.2 Konstrukce elipsy

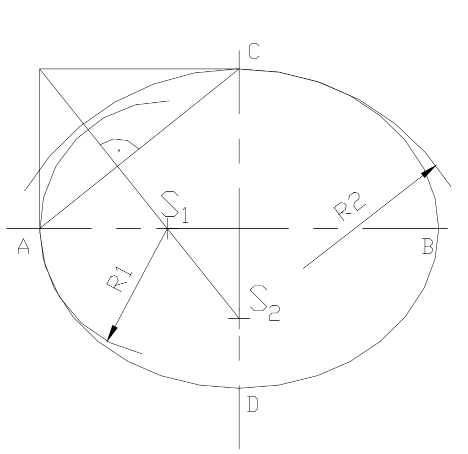
Pro elipsu můžeme použít několik různých konstrukcí.

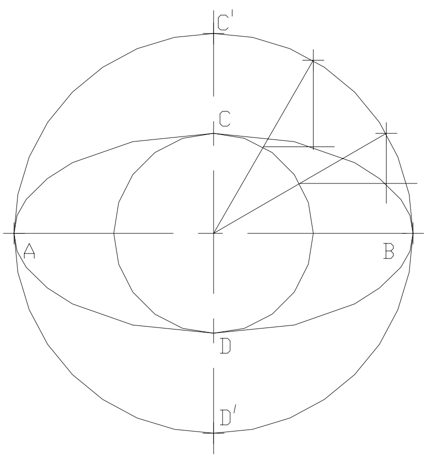
1. **Průvodičová** - postupujeme podle definice. K praktickému použití se příliš nehodí.

2. **Konstrukce pomocí oskulačních kružnic**, neboli kružnic křivosti. Poloměry těchto kružnic nahrazují křivku v její jisté části - u elipsy je to v úhlu 30° od os elipsy (hlavní i vedlejší). Nejčastěji používaná konstrukce.

Postup konstrukce: Nad jednou čtvrtinou elipsy sestrojíme obdélník. V obdélníku sestrojíme úhlopříčku, která spojí vrcholy elipsy. Na tuto úhlopříčku vedeme z vrcholu obdélníku kolmici, která na hlavní ose určí střed křivosti S_1 a na vedlejší ose S_2. Sestrojíme kružnice křivosti o poloměrech R_1 a R_2 - viz obrázek. Mezeru mezi kružnicemi doplníme křivítkem. Při trochu pečlivé konstrukci a tehdy, není-li rozdíl mezi hlavní a vedlejší osou veliký, je konstrukce poměrně přesná.

3. **Trojúhelníková konstrukce**. Konstrukce vychází z afinního vztahu mezi kružnicí a elipsou. Elipsa může též vzniknout průmětem kružnice, která není v rovině rovnoběžné s průmětnou a pak je mezi kružnicí a elipsou afinita.



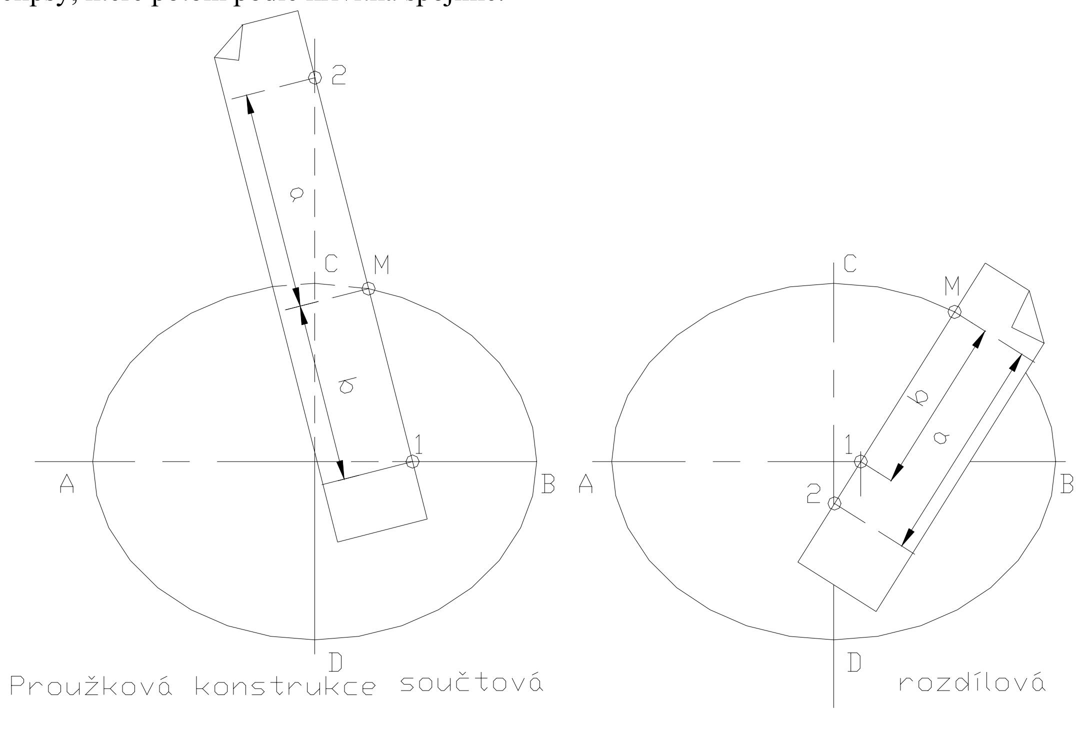


konstrukce pomocí kružnic křivosti trojúhelníková konstrukce

4. **Proužkové konstrukce**

Jsou odvozeny z trojúhelníkové konstrukce a umožňují rychlou a přesnou konstrukci bez použití kreslících pomůcek. Používáme metodu **součtovou**, která je velmi přesná, ale vyžaduje větší prostor okolo elipsy. Další je metoda **rozdílová**, která nevyžaduje tolik prostoru, ale je méně přesná.

Postup: Na proužek papíru si naneseme poloosy elipsy - viz obrázky. Posunujeme papírkem po hlavní (1) a vedlejší (2) ose elipsy a bod M opisuje elipsu. Můžeme si odvodit libovolný počet bodů elipsy, které potom podle křivítka spojíme.

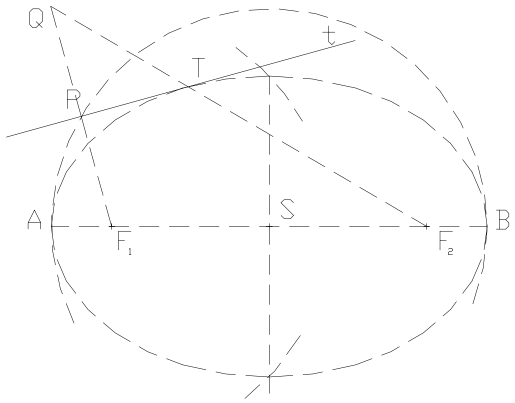


2.3 Způsoby zadání elipsy

Elipsu můžeme zadat mnoha různými způsoby. Předvedeme si jeden způsob zadání a jeho řešení. Posouzení zadání - v zadání musí být zadány čtyři prvky (jeden ale může být skrytý).

Úloha:

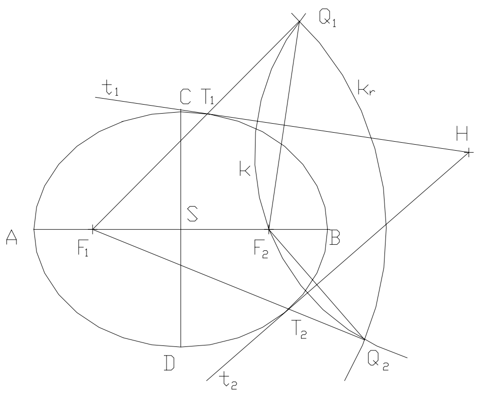
Elipsa je zadána F_1, F_2 a tečnou t.



Řešení: Ohniska určují směr hlavní osy a střed elipsy S sestrojíme na ní. Z ohniska můžeme sestrojit kolmici na tečnu a tím získáme bod P - bod vrcholové kružnice. Vzdálenost SP = a . Sestrojíme vrcholovou kružnici. Tím je dána délka hlavní osy a můžeme zkonstruovat i osu vedlejší. Prodloužením F_1P sestrojíme bod souměrně sdružený k ohnisku Q. Kde přímka QF_2 protne tečnu t je tečný bod T.

Obdobné příklady k procvičení budou uvedeny v příkladech.

2.4 Tečna k elipse



Tečna k elipse z daného bodu

Zvládnutí této úlohy je potřebné v případě, jestliže kreslíme kužel v obecné poloze, kdy se podstava jeví jako elipsa. Z daného bodu k elipse můžeme vést dvě tečny.

Řešení : - konstrukce pomocí kružnice řídící :

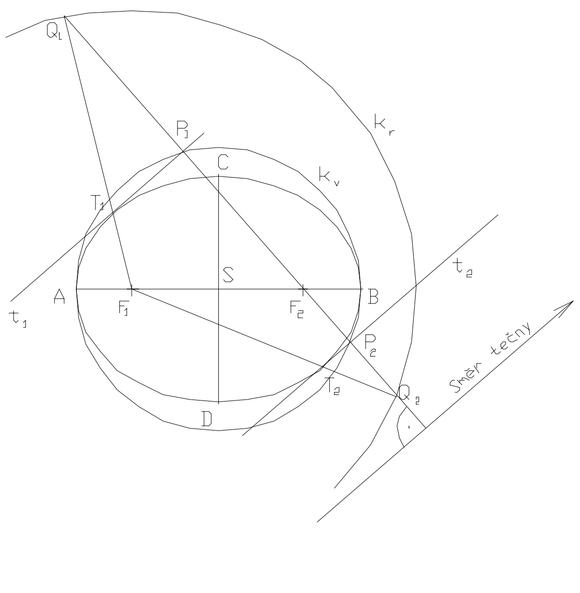
Daný bod H je středem kružnice k, která prochází ohniskem F_2. Kde se tato kružnice protne s řídící kružnicí k_r, leží body Q_1 a Q_2 - body souměrně sdružené podle tečny k ohnisku. Na úsečku F_2Q_2 a F_2Q_1 vedeme z bodu H přímky kolmé, což jsou hledané tečny. Úsečka F_1Q_1 určuje tečný bod T_1 a úsečka F_1Q_2 tečný bod T_2.

Existuje i další řešení - **pomocí kružnice vrcholové**. Pouze slovní popis:

Úsečka F_2H je průměrem Thaletovy kružnice, na které leží paty příslušných tečen. Kde se tato kružnice protne s vrcholovou, leží body P pro tečny.

Tečna k elipse rovnoběžná s danou přímkou

Úloha je opět potřebná v mnohých případech v DG, například při zobrazení válce v obecné poloze, kdy známe osu válce a konstruujeme polohu obrysových hran. Ke konstrukci můžeme opět použít jak vrcholovou, tak řídící kružnici.

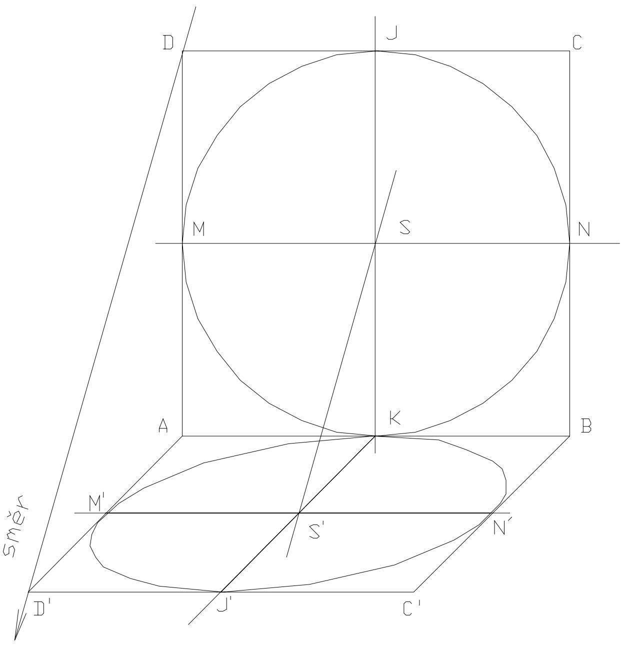


Řešení:

Z ohniska vedeme kolmici na směr tečny. Kde kolmice protne řídící kružnici k_r, leží body Q_1 a Q_2. Pro úsporu místa můžeme použít jen vrcholovou kružnici, pak dostaneme paty kolmic na tečnu P_1 a P_2. Sestrojíme vrcholovou kružnici. Vedeme přímky rovnoběžné se směrem příslušnou patou kolmice P - t_1 a t_2 . Tečné body sestrojíme pomocí úseček F_2Q_1 a F_2Q_2

2.5 Průměty kružnice

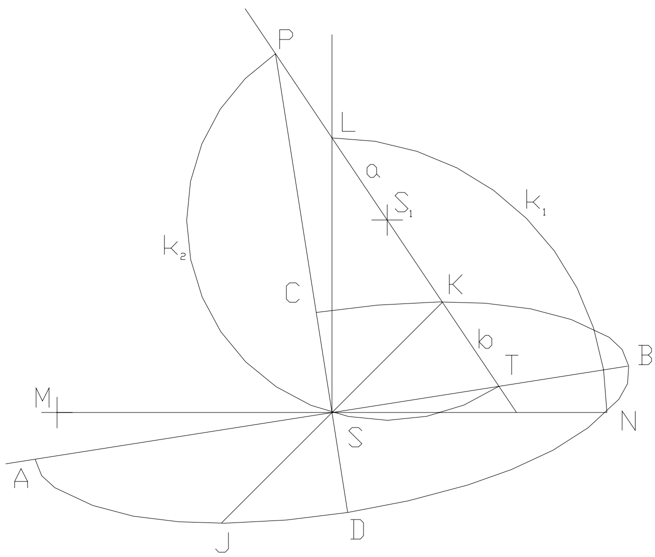
Rovnoběžným průmětem kružnice i elipsy je buď elipsa, kružnice, nebo přímka. Mezi jednotlivými průměty je afinita. Pro větší názornost si nejprve zobrazíme **kosoúhlý průmět**, na kterém si zobrazíme jednotlivé vztahy.



Kružnice je umístěna ve čtverci ABCD a jestliže tento čtverec otáčíme okolo hrany AB do polohy ABC´D´, jeví se tento čtverec jako kosoúhelník. Mezi průměty je afinita - směr je dán přímkou DD´, osa je úsečka AB. Průměru kružnice MN odpovídá M´N´ a JK odpovídá J´K. Průměry J´K a M´N´ jsou též na sebe kolmé. Průměry J´K a M´N´ nazýváme **sdruženými průměry elipsy**.

Sdružené průměry dostáváme při kon-strukcích řezů na kuželu i válci velmi často v případech, kdy řez je jako elipsa zobrazen jak v prvém, tak druhém průmětu Mongeova promítání.

Abychom mohli sestrojit elipsu i ze sdružených průměrů, používáme tzv. **Rytzovu konstrukci**. Je odvozena z afinity mezi průměty elipsy. V konečné fázi konstrukce tam můžeme rozpoznat i proužkovou konstrukci elipsy.



Postup při Rytzově konstrukci:

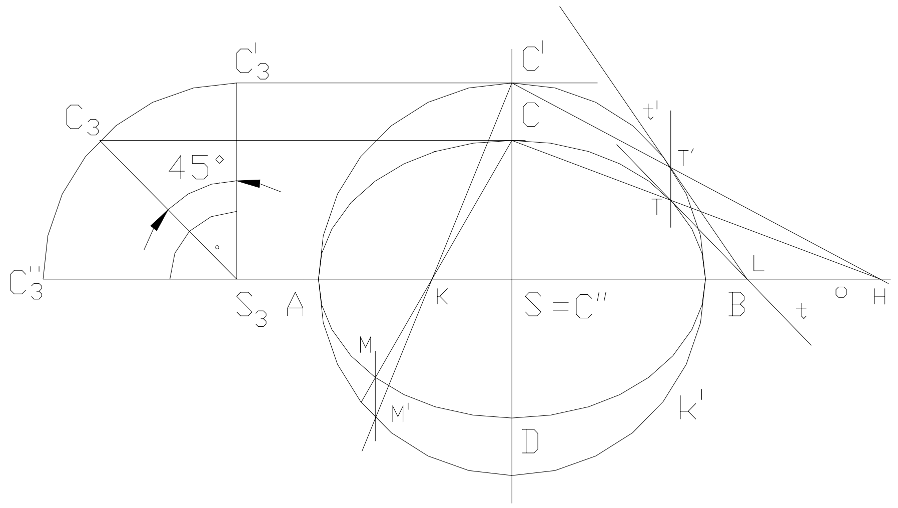
Máme sdružené průměry JK a MN. Na delší průměr (MN) sestrojíme ve středu elipsy S přímku kolmou. Dále sestrojíme kružnici $k_1 = (S,SN)$, která na kolmici určí bod L. Nakreslíme přímku, která prochází body LK. Sestrojíme kružnici $k_2 = (S_1, S_1S)$. Střed S_1 je v polovině úsečky LK. Kružnice k_2 určí na přímce procházející body LK body T a P, kterými prochází hlavní osa AB a vedlejší osa CD elipsy. Délka hlavní poloosy a je dána úsečkou PK a vedlejší poloosy b úsečkou KT. (Zde můžeme vidět zmíněnou proužkovou konstrukci elipsy.)

Jistě si dovedete představit i takové natočení čtverce s kružnicí, kdy by průmět čtverce byl totožný s přímkou procházející body AB a čtverec i kružnice se promítnou jako přímka.

Pravoúhlý průmět kružnice a její natočení.

Na rozdíl od předchozího kosoúhlého průmětu kružnice zde otáčíme kružnici k´= (S, SA) v ose o procházející body AB. Při natočení (voleno natočení 45°) se kružnice k´ promítne jako elipsa s osou AB a CD. Osa AB má velikost průměru kružnice k´, osa CD se zkrátí v závislosti na úhlu natočení.

Zkrácení CD odvodíme z bokorysu, v kterém se kružnice jeví jako úsečka (nakreslena pouze polovina průmětu).



Mezi kružnicí a elipsou je opět afinita, tentokrát pravoúhlá. Tímto způsobem je možné podle kružnice zkonstruovat body elipsy. Na ose afinity si zvolíme bod H. Sestrojíme přímku C´H a průsečík s k´ je bod T´. Nakreslíme přímku odpovídající HC a pomocí směru afinity sestrojíme odpovídající bod elipsy T. Obdobná je konstrukce bodu M.

Pomocí afinity můžeme sestrojit v bodě T tečnu k elipse t. Sestrojíme tečnu t´ v bodě T´ ke kružnici k´. Získáme průsečík tečny t´ a osy o bod L a úsečka TL je tečna t.

Z takto zadané afinity lze odvodit i trojúhelníkovou konstrukci elipsy. Natočení kružnice okolo osy AB je zde znázorněno. Nutno si uvědomit, že při určitém natočení **elipsy** okolo osy CD se promítne elipsa jako **kružnice** a i zde je afinita. Domyslete sami, jak vznikla trojúhelníková konstrukce elipsy.

Natočíme-li kružnici k´ o 90°, tak se kružnice promítne do osy otáčení jako přímka.

2.6 Kružnice v rovině

Máme znázornit kružnici, která leží v rovině.

Mohou nastat tyto případy:

1. Rovina je kolmá k některé z průměten - kružnice se v jednom průmětu jeví jako elipsa, v druhém jako přímka.

2. Rovina je rovnoběžná s jednou průmětnou - kružnice se promítá v jednom průmětu jako přímka, v druhém jako kružnice

3. Rovina obecná - kružnice se v jednom i druhém průmětu promítá jako elipsa.

Zajímá nás především třetí případ.

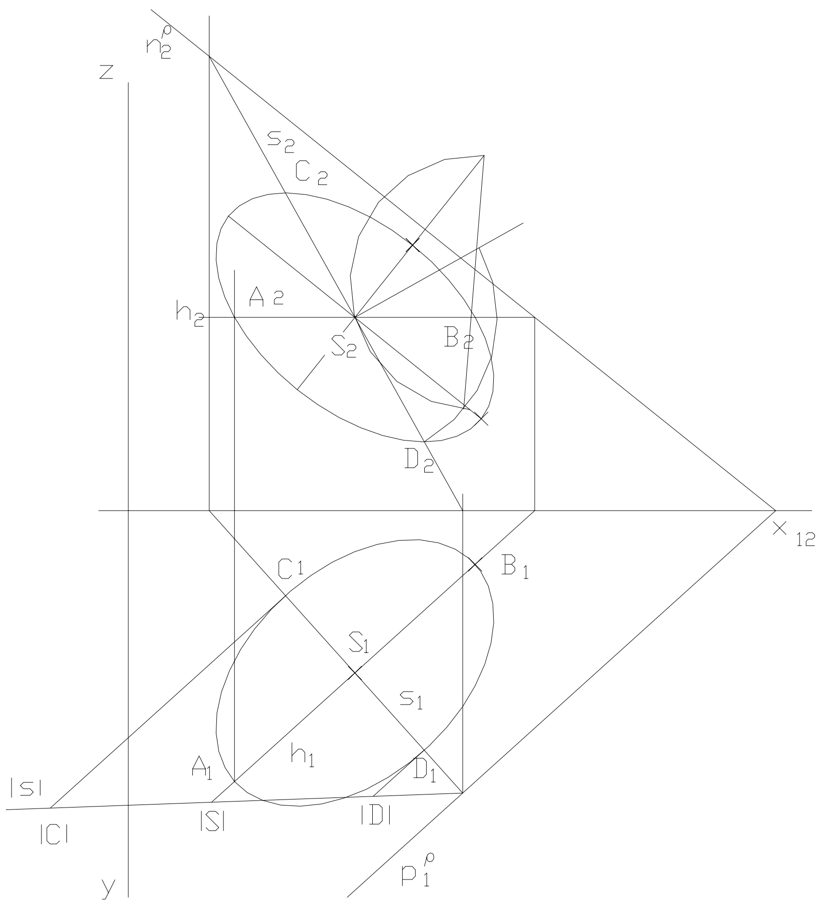
Úloha:

Zobrazte kružnici v rovině σ (10, 9, 8) se středem S (3.5, 2.5, ?) a poloměru R 2.5. (rozměry v cm).

Řešení:

Je několik způsobů řešení, které závisí na možnostech z hlediska přesnosti, rychlosti konstrukce, přehlednosti a znalostech. Možné řešení - popis:

Sestrojíme střed kružnice v jednotlivých průmětech - k přenesení do druhého průmětu použijeme hlavní přímku h. V prvém průmětu je hlavní přímka ve skutečné velikosti a můžeme na ni nanést velikost poloměru a dostaneme osu elipsy A_1B_1.



Středem kružnice S vedeme spádovou přímku s a sestrojíme sklopením její skutečnou velikost. Na sklopenou spádovou přímku naneseme velikost poloměru a sklopíme zpátky. Tím dostaneme vedlejší osu C_1 D_1. V druhém průmětu sestrojíme body A_2, B_2, C_2, D_2 a dostaneme sdružené průměry elipsy. Pomocí Rytzovy konstrukce sestrojíme osy elipsy a zkonstruujeme elipsu.

Další možnosti :

1. V druhém průmětu můžeme postupovat úplně stejně jako v prvém průmětu pomocí hlavní a spádové přímky druhé osnovy.
2. Můžeme převést body elipsy z prvého průmětu pomocí hlavních přímek do průmětu druhého.

2.7 Řez kuželem rovinou kolmou k nárysně

Základní konstrukce kreslení řezu kuželem je řez rovinou kolmou k nárysně. Jestliže je rovina obecná, používáme k zjištění bodů řezu i této konstrukce. Proto znalost principů je pro složitější případy nezbytná.

Úloha:

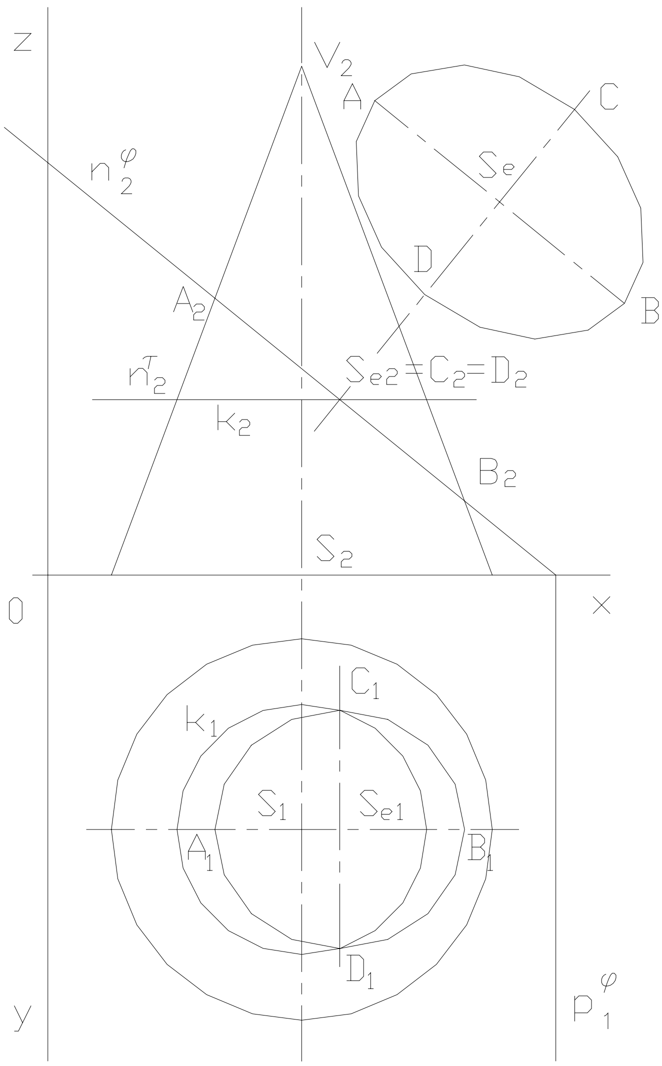
Sestrojte řez přímým kuželem rovinou φ , která je kolmá k π_2. Kužel - střed podstavy S (40, 40, 0), výška 80, poloměr podstavy R=30. Rovina řezu φ (80, ∞, 65).

Rozbor:

V prvém průmětu se řez bude jevit jako elipsa. V druhém průmětu se rovina řezu jeví jako přímka.

Řešení:

V druhém průmětu označíme krajní body řezu, které jsou též vrcholy elipsy řezu A,B. Přeneseme tyto body do prvého průmětu. Střed elipsy řezu S_e bude ve středu úsečky AB. Středem S_e bude procházet vedlejší osa elipsy řezu CD. V druhém průmětu se jeví tato osa jako bod, v prvém jako přímka. Je nutné zjistit velikost této osy. Zde využijeme řezu rovinou rovnoběžnou s podstavou - τ . Řez je kružnice k , která určí v prvém průmětu velikost vedlejší osy CD. Některým z druhů konstrukce elipsy (optimální je metoda kružnic křivosti) zobrazíme řez v prvém průmětu.
Skutečnou velikost řezu sestrojíme otočením elipsy do roviny rovnoběžné s nárysnou. Skutečná velikost osy AB je v druhém průmětu, CD je v prvém průmětu.



Řez kuželem rovinou kolmou k π_2

2.8 Řez koulí

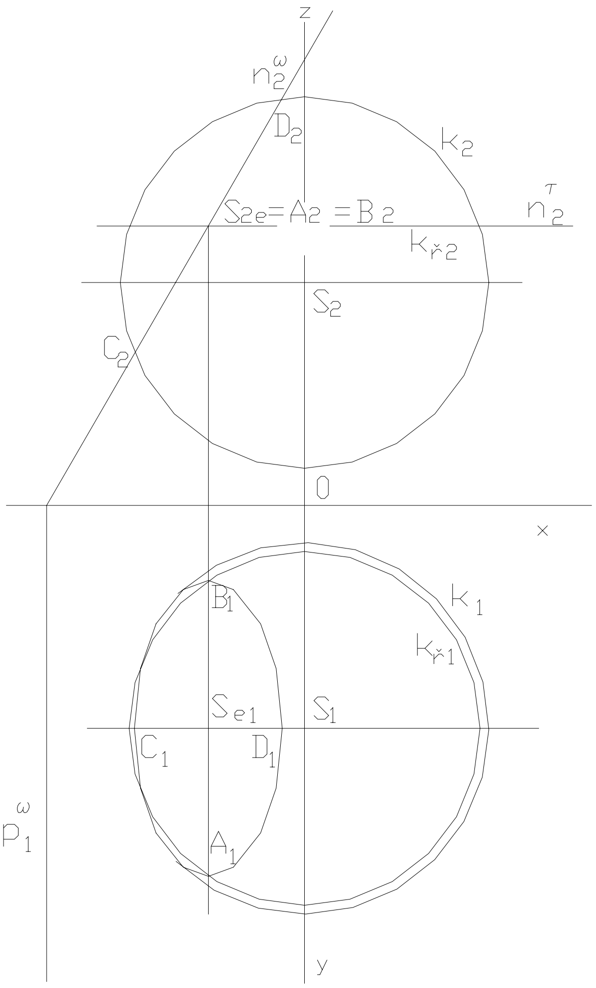
Řez koulí je vždy kružnice. Záleží na poloze roviny, jak se tato kružnice jeví. Řez se zobrazí stejně, jak je uvedeno zobrazení kružnice v rovině v kapitole 5 .

Úloha:

Sestrojte řez koulí k rovinou ω. Koule k = (S , 2.5) , S(0, 3, 3). Rovina řezu ω (- 3.5, ∞, 6).

Rozbor:

Řez provádíme obdobně jako předchozí řez kužele. V druhém průmětu se řez jeví jako přímka a na této přímce vidíme ve skutečné velikosti osu elipsy CD. Přeneseme tuto osu do prvého průmětu - body C_1 a D_1. Osa elipsy AB je kolmá k druhé průmětně a promítá se jako bod totožný se středem elipsy $S_{e2} = A_2 = B_2$. Proto opět vedeme středem elipsy S_e rovinu rovnoběžnou s první průmětnou - rovinu τ .



Řezem je kružnice $k_ř$, která se v druhém průmětu zobrazí jako přímka a v prvém jako kružnice $k_{ř1}$. Prochází vrcholy elipsy A_1 B_1. Nyní je možné v prvém průmětu zobrazit elipsu řezu.

Pozn.

Hlavní osu elipsy můžeme v prvém průmětu zkonstruovat jednodušším způsobem. Osa AB je přímka kolmá k druhé průmětně a tedy rovnoběžná s prvou průmětnou. Je v prvém průmětu ve skutečné velikosti a délka |AB| je rovna velikosti průměru kružnice řezu – délce $|C_2D_2|$. Můžeme použít pouze u roviny řezu kolmé k průmětně.

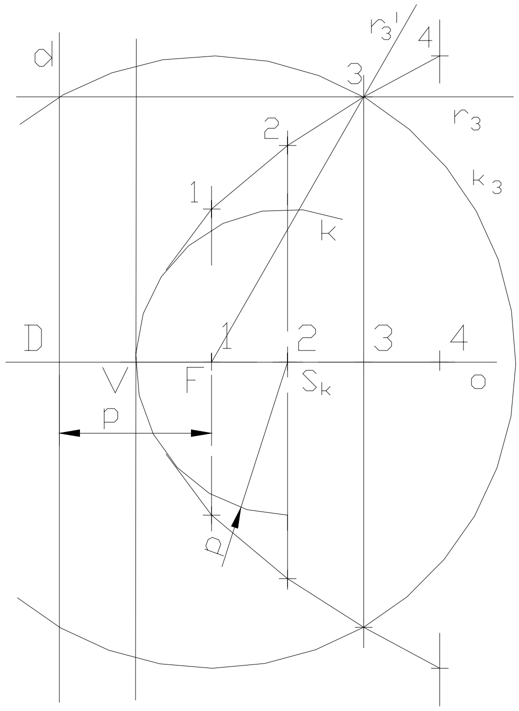
Použití řezné roviny τ je použitelné pro obecné roviny řezu.

Úlohy:

1. Sestrojte elipsu, která je dána vrcholem A, středem S a bodem elipsy M.
2. Sestrojte elipsu, která je zadána vrcholem A , C a délkou hlavní poloosy <u>a</u>.
3. Sestrojte elipsu, která je zadána tečnami t_1, t_2, t_3 a ohniskem F_1.
4. Sestrojte elipsu, která je zadána vrcholem C, ohniskem F a tečnou t.

3 Parabola

Definice



Parabola je geometrické místo bodů, které mají od daného bodu (ohniska) a dané přímky (přímky řídící) stejnou vzdálenost.

Tato definice se používá běžně pro konstrukci paraboly, i když je více konstrukcí (např. pomocí tětiv, tečnová). Zmíněné konstrukce jsou dost pracné a náročné na přesnost kreslení.

Základní pojmy

Osa paraboly o je kolmá na přímku řídící d. Na ose leží ohnisko F ve vzdálenosti p (parametru) od přímky řídící. Vrchol paraboly V půlí vzdálenost mezi ohniskem a přímkou řídící d (podle definice). Průvodiče (na obrázku u bodu paraboly 3) jsou r_3 a r_3'. Čím je parametr menší, tím je parabola užší.

Při kreslení paraboly můžeme opět využít oskulační kružnici k - kružnici křivosti. Poloměr kružnice je roven parametru p .

Konstrukce:

Rozdělíme si osu paraboly od vrcholu na několik dílů - 1 až 4. Množina všech bodů ve stejné vzdálenosti (např. D3) od přímky řídící je rovnoběžka s touto přímkou. Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost D3 od daného bodu F je kružnice k_3 = (F, D3). Společné body rovnoběžky a kružnice jsou body paraboly

3.1 Tečna a normála paraboly

Pro konstrukci tečny paraboly platí stejné pravidlo jako u elipsy - tečna t půlí úhel průvodičů v bodě T. Normála je kolmice na tečnu v bodě dotyku tečny T.

Řídící přímka i vrcholová tečna u paraboly mají stejný význam jako u elipsy řídící a vrcholová kružnice.

Množina všech bodů Q souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen paraboly leží na řídící přímce d.

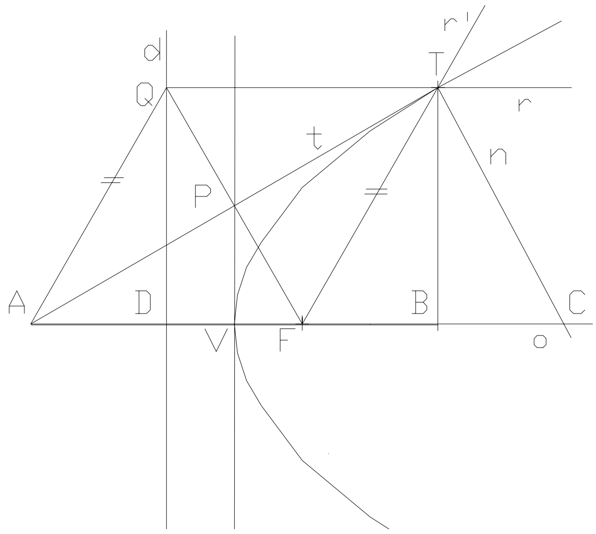
Množina všech pat kolmic P vedených z ohniska F k tečnám paraboly leží na vrcholové tečně paraboly.

Mimo tečny a normály je u paraboly zaveden zvláštní pojem - subtangenta a subnormála.

Subtangenta je pravoúhlý průmět tečny t do osy paraboly od bodu B do průsečíku s osou A. Obdobně **subnormála která je pravoúhlým průmětem normály do osy od bodu B do bodu C.**

Pro tyto průměty tečny a normály platí:

Subtangenta je půlena vrcholem paraboly V.



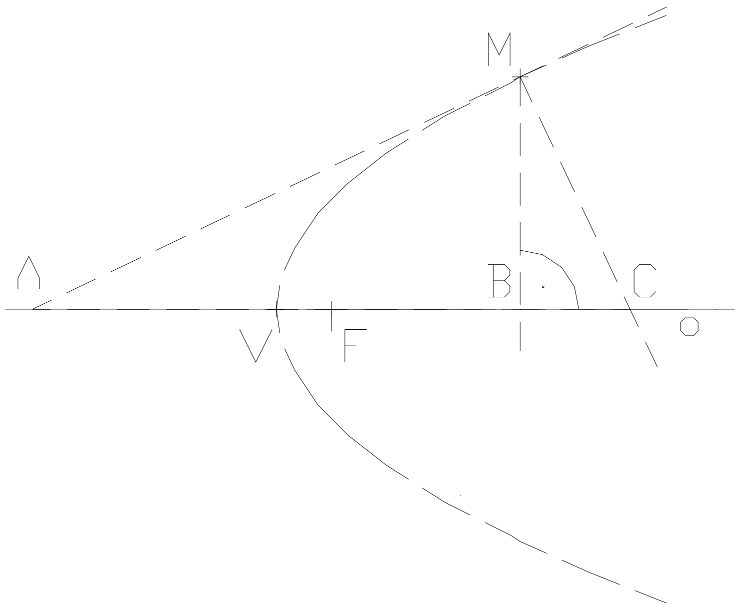
Subnormála má konstantní velikost a je rovna parametru p.

Subtangenta a subnormála je půlena ohniskem F.

Poznatky o subnormále a subtangentě používáme k sestrojení prvků paraboly, jestliže je parabola zadána jinak než ohniskem a přímkou řídící.

Právě toto zadání pro konstrukci bývá časté při kreslení paraboly řezu kužele, kdy obvykle sestrojíme osu paraboly, vrchol a dva body paraboly.

Úloha:
Sestrojte parabolu zadanou osou o, vrcholem V a bodem M



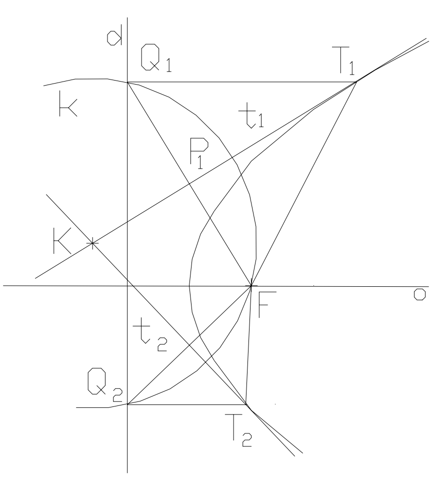
Řešení:
Z bodu M sestrojíme kolmici na osu paraboly o. Společný bod kolmice a osy je bod B subtangenty.
Subtangenta je půlena vrcholem V a proto můžeme sestrojit druhý bod subtangenty bod A. Tím máme dva body tečny - AM. V bodě M sestrojíme normálu MC. Rozpůlením AC získáme ohnisko paraboly F a můžeme provést konstrukci paraboly.

Několik dalších zadání paraboly nestandardním způsobem bude uvedeno v závěru kapitoly.

Tečny k parabole z daného bodu

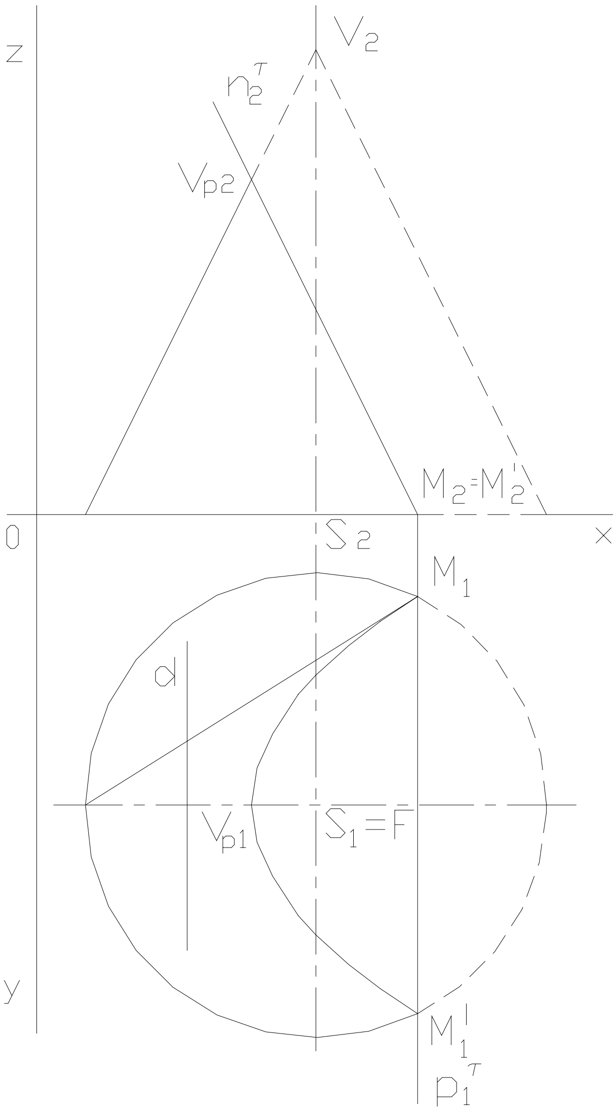
Velmi často v konstrukcích je nutné sestrojit k parabole tečny z daného bodu. Tato konstrukce je opět obdobná podobné konstrukci u elipsy. K sestrojení používáme řídící přímky a vrcholové tečny.

Úloha:
Sestrojte tečny k parabole z bodu K. Parabola je dána osou o, ohniskem F a přímkou řídící d.



Bod K je středem kružnice $\underline{k} = (K, KF)$, která prochází ohniskem. V průsečíku $\underline{k}$ a $\underline{d}$ jsou body Q_1 a Q_2 - body souměrně sdružené k ohnisku podle tečny. Tečna t_1 je kolmá na úsečku Q_1F a tečna t_2 je kolmá na úsečku Q_2F. Tečné body určí průvodiče rovnoběžné s osou paraboly v bodech Q_1 a Q_2.

3.2 Parabolický řez kuželem - rovina řezu kolmá k nárysně



Sestrojte parabolický řez přímým kuželem rovinou τ, která je kolmá k nárysně.

Aby řez byl parabolický, musí být nárysná stopa roviny řezu τ rovno-běžná s povrchovou přímkou kužele. V druhém průmětu se rovina řezu promítá jako přímka. Kde nárysná stopa protíná povrchovou přímku kužele, je vrchol para-boly V_{p2}. Kde protíná nárysná stopa podstavu kužele, jsou dva body paraboly – M_2 a M'_2. Tyto body přeneseme do prvé-ho průmětu a tím dostaneme zadání paraboly vrcholem V_{p1}, osou - vodorovná osa kužele, a bodem M_1.

Způsob řešení byl uveden v kapitole 3.1.

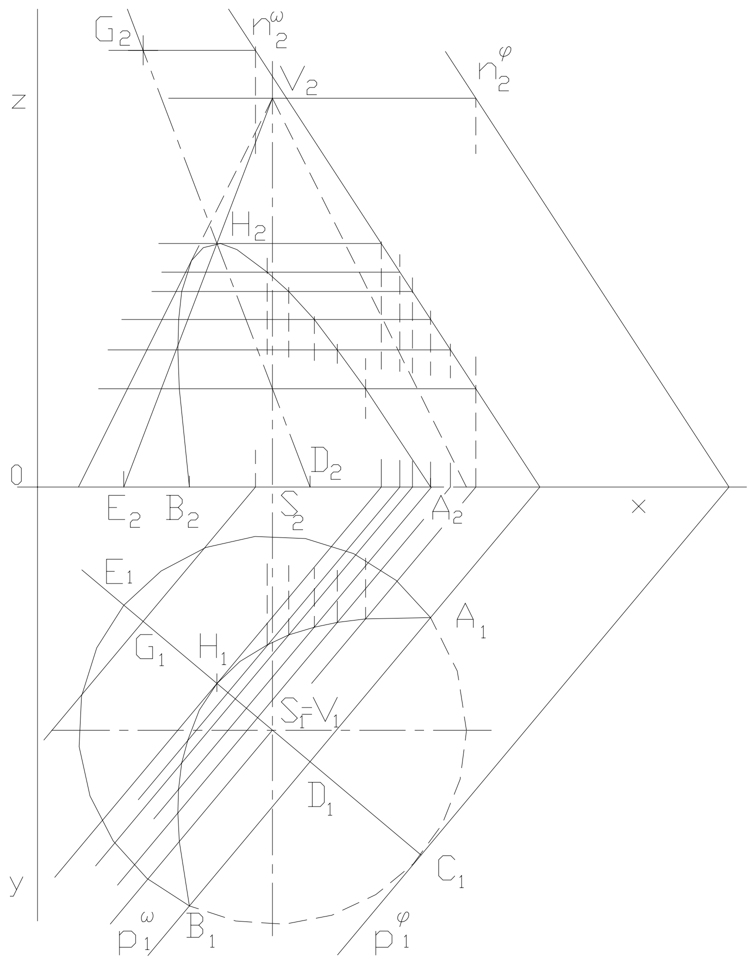
3.3 Parabolický řez obecnou rovinou

Úloha:

Sestrojte parabolický řez přímým ku-želem se středem podstav S(50, 50, 0), výškou v = 80, poloměrem podstavy R 40. Rovina řezu ω (110, 125, ?).

Řešení:

Nejprve je nutné definovat rovinu řezu. Jedná se o určení nárysné stopy roviny. Rovina ω musí být rovnoběžná s povrchovou přímkou CV. Touto přímkou proložíme rovinu φ . Nárysnou stopu sestrojíme pomocí hlavní přímky procházející vrcholem kužele V. Nárysná stopa roviny φ určuje směr nárysné stopy roviny ω.



Sestrojíme osu paraboly. V rovině ω to je spádová přímka roviny procházející bodem D, který je jejím půdorysným stopníkem. V prvém průmětu sestrojení není problémem. V druhém průmětu můžeme sestrojit spádovou přímku buď pomocí stopníků, ale v našem případě je z prostorových důvodů výhodnější použití bodu na spádové přímce - bod G. Kde druhý průmět přímky DG protne povrchovou přímku kužele EV, je vrchol paraboly bod H.

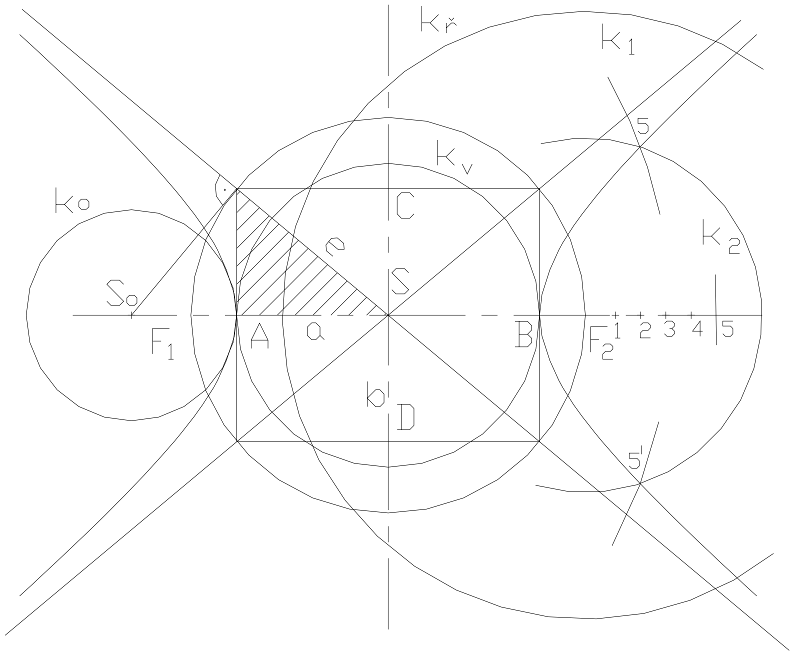
V prvém průmětu máme klasické zadání paraboly - osa, vrchol paraboly a body A,B. Pomocí subtangenty a subnormály určíme polohu řídící přímky, ohniska a sestrojíme parabolu. Na obrázku je tato konstrukce vynechána, protože obrázek by byl nepřehledný.

Parabolu v druhém průmětu sestrojíme pomocí hlavních přímek. Hlavní přímky jsou nejdůležitější poblíž vrcholu paraboly H. Ve spodní části parabola začíná mít průběh blížící se přímce. Jednotlivé body paraboly na hlavní přímce v prvém průmětu přenášíme pomocí ordinál do druhého průmětu. Na levé větvi paraboly jsou ordinály poměrně hustě, a tak na konstrukci nejsou znázorněny stejně jako popis hlavních přímek.

Příklady :

Sestrojte parabolu, která je zadána:

a) osou, ohniskem a jedním bodem
b) osou, ohniskem a tečnou
c) osou, ohniskem a normálou
d) ohniskem, tečnou a bodem, který na dané tečně neleží.



4 Hyperbola

Definice

Hyperbola je množina bodů, které mají od dvou daných bodů - ohnisek – stálou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou délce hlavní osy.

Porovnejte si definici elipsy - kde je součet vzdáleností, paraboly - kde je stejná vzdálenost a hyperboly. Zjistíte, že se liší pouze v rozdílném způsobu vynášení vzdáleností.

Základní pojmy

Podobně jako u předchozích kuželoseček ohniska označujeme písmenem F. Střed úsečky $|F_1F_2|$ je středem hyperboly S. Vzdálenost $|SF_1| = |SF_2|$ se nazývá excentricita (též lineární výstřednost) hyperboly a značí se $\underline{e}$. Vzdálenost |AB| se nazývá hlavní osa - velikost $\underline{2a}$ a |CD| osa vedlejší - velikost $\underline{2b}$. Tyto osy udávají velikost charakteristického čtyřúhelníka. Jeli tento čtyřúhelník čtverec – a = b - mluvíme o rovnoosé hyperbole (hyperboly můžeme vytvořit jak podle hlavní, tak podle vedlejší osy a v tomto případě jsou všechny stejné). Trojúhelník určený poloosami $\underline{a,b}$ a excentricitou $\underline{e}$ nazýváme charakteristický. Hyperbola je složena ze dvou částí bez společného bodu a tyto části nazýváme větve hyperboly.

Obdobně jako u elipsy i u hyperboly využíváme při konstrukcích kružnici řídící – $\underline{k_ř}$ a kružnici vrcholovou $\underline{k_v}$. Definice jsou obdobné.

Na vrcholové kružnici leží paty kolmic vedených z ohniska k tečnám hyperboly. Střed kružnice je střed hyperboly S a poloměr je $\underline{a}$.

Na řídící kružnici leží body souměrně sdružené k ohnisku podle tečen hyperboly. Střed kružnice je ohnisko a poloměr je $\underline{2a}$.

Tečna k hyperbole půlí úhel průvodičů (vnější). Normála půlí vnitřní úhel průvodičů. Asymptota je tečna k hyperbole v nekonečnu. Tvoří ji úhlopříčka charakteristického čtyřúhelníka.

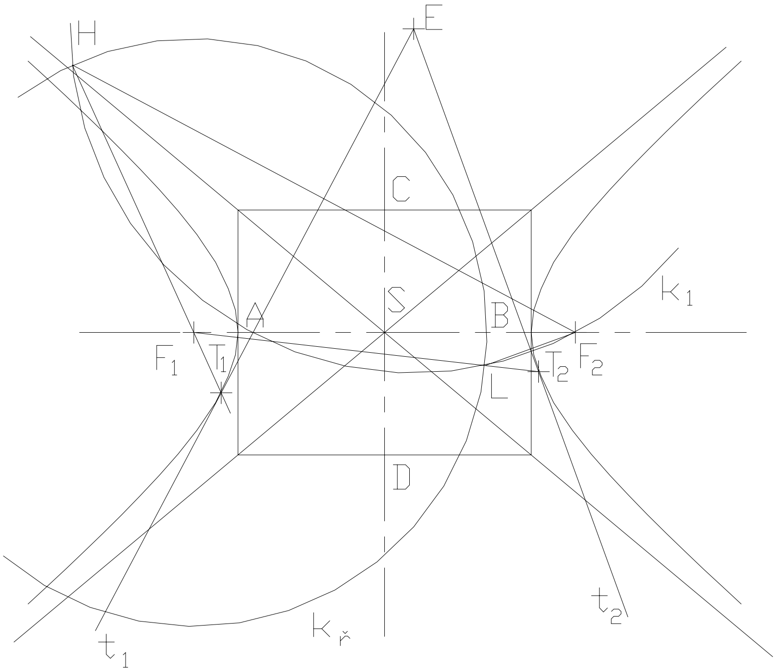
4.1 Konstrukce hyperboly

Nejvíce je využívaná bodová konstrukce na základě definice. Zadány máme osy hyperboly |AB| a |CD|. Sestrojíme charakteristický čtyřúhelník. Opsaná kružnice okolo čtyřúhelníka určí polohu ohnisek F_1 a F_2. Sestrojíme asymptoty jako úhlopříčky ve čtyřúhelníku. Pro konstrukci bodů hyperboly budeme využívat průvodiče. Na ose hyperboly si za ohniskem vytvoříme několik bodů (1 – 5). Do kružítka si vezmeme vzdálenost A5 a sestrojíme kružnici k_1 se středem v F_1. Z ohniska F_2 se strojíme kružnici k_2 s poloměrem B5. Kde mají kružnice k_1 a k_2 společné body, jsou body 5 a 5´ hyperboly. Při konstrukci si je nutné uvědomit, že hyperbola se k asymptotám postupně blíží až přechází v rovnoběžky Nesmí se stát, že asymptoty protne - v tom případě jsme ji konstruovali nesprávně.

Podobně jako u paraboly využíváme oskulační kružnici $\underline{k_O}$ k náhradě bodů hyperboly poblíž vrcholu, kde by konstrukce bodů byla velmi obtížná. Střed oskulační kružnice S_O sestrojíme, jestliže zkonstruujeme kolmici na asymptotu ve vrcholu charakteristického čtyřúhelníka a kde tato kolmice protne osu hyperboly, je střed oskulační kružnice.

.

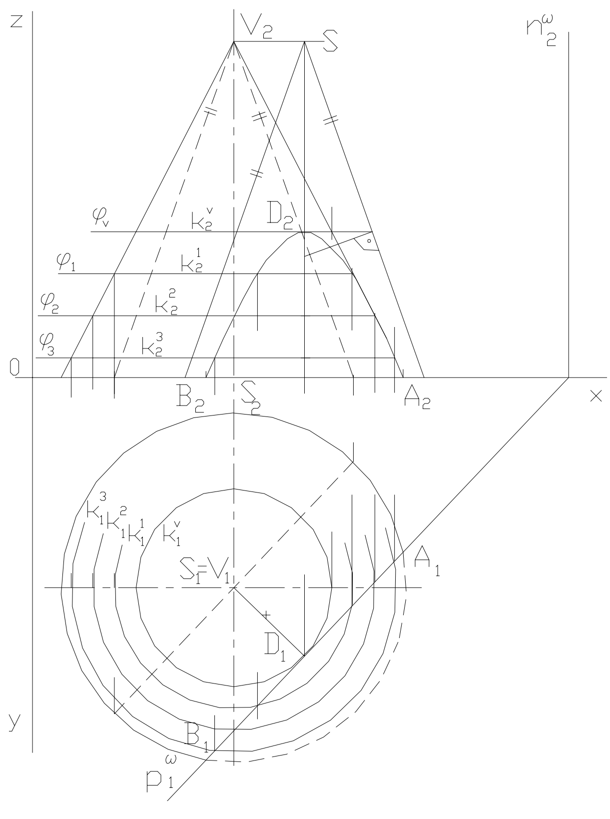
4.2 Tečna k hyperbole z daného bodu



Velmi častá úloha v konstrukcích je vedení tečny k hyperbole z daného bodu. Ke konstrukci můžeme opět využít jak řídící, tak vrcholovou kružnici. Kružnice vrcholová určuje přímo patu kolmice, ale pro sestrojení tečného bodu je tato konstrukce méně výhodná. Použijeme te-dy kružnici řídící $k_ř$.

Daný bod E je středem kružnice k_1, která prochází jedním ohniskem (na obrázku F_2). Z druhého ohniska F_1 sestrojíme řídící kružnici $k_ř$. Kružnice k_1 a $k_ř$ mají společní body H a L, které jsou souměrně sdružené podle tečen k ohnisku F_2. Sestrojíme úsečky $|F_2H|$ a $|F_2L|$ a z bodu E vedeme kolmice k oběma úsečkám, což jsou tečny t_1 a t_2. (Též je možné pomocí vrcholové kružnice sestrojit paty kolmic a tečny vést patami kolmic).

4.3 Hyperbolický řez kuželem



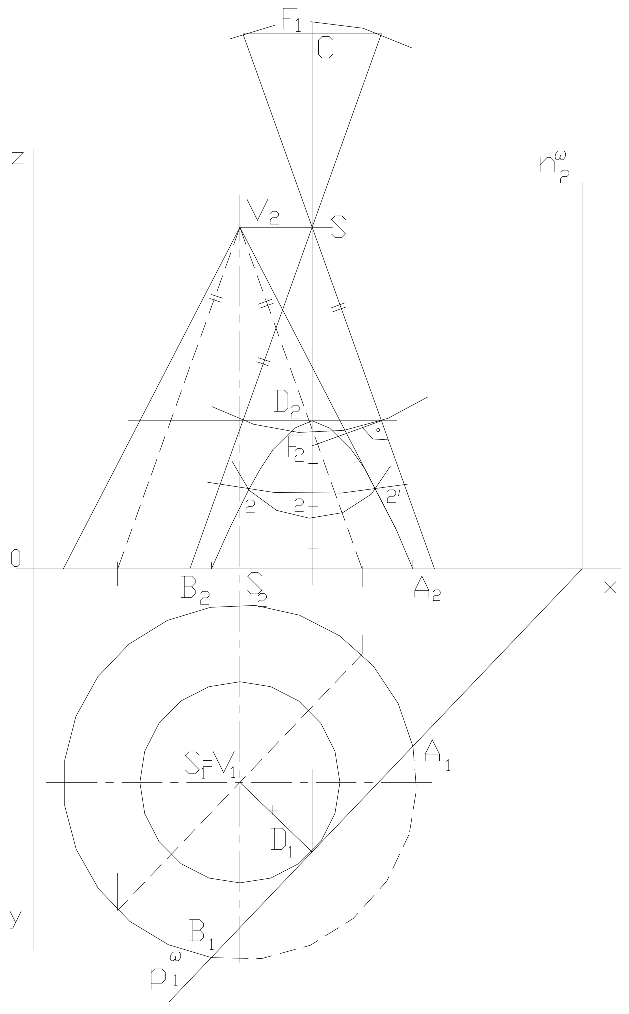
Úloha:
Sestrojte řez přímým kuželem rovinou kolmou k prvé průmětně.

Rozbor:
Rovina řezu je kolmá k prvé průmětně, má tedy větší úhel s podstavou než povrchová přímka - řez je hyperbolický. V DG máme vždy několik možností řešení. Opět je nutno volit konstrukci, která nám nejlépe vyhovuje z hlediska přesnosti a přehlednosti. V prvém prů-mětu se rovina řezu jeví jako přímka, v druhém je křivkou řezu hyperbola.

První způsob řešení - kužel rozřízneme několika rovinami rovnoběžnými s podstavou kužele. Řezem je kružnice. Kde tato kružnice protne rovinu řezu, jsou body křivky řezu - hyperboly. Princip řešení je nejlépe vidět na podstavě kužele, kde rovina řezu protíná podstavu v bodech A a B. Body z prvého průmětu do druhého přeneseme pomocí ordinál. K sestrojení dalších bodů použijeme roviny φ_1 až φ_3, které vytvoří kružnice řezu $\underline{k}^1$ až $\underline{k}^3$.

Je nutné též sestrojit vrchol hyperboly bod D. Osa hyperboly se v prvém průmětu jeví jako bod, v druhém jako přímka kolmá k ose $\underline{x}$. V prvém průmětu sestrojíme kružnici řezu k^V (ležící v rovině φ_V), která se dotýká roviny řezu ω a prochází vrcholem hyperboly D. Sestrojení je v prvém průmětu jednoduché. Do druhého průmětu převedeme kružnici řezu pomocí ordinály. V druhém průmětu se kružnice jeví jako přímka, na ose určí polohu bodu D.

Při konstrukci hyperboly je výhodné použít oskulační kružnici, protože největší zakřivení hyperboly je ve vrcholové části. K tomu jsou nutné asymptoty. Směr asymptot určíme tím způsobem, že sestrojíme vrcholovou rovinu rovnoběžnou s rovinou řezu a povrchové přímky, které rovina řezu vytvoří, určují směr asymptot. Střed hyperboly je na ose hyperboly a v našem případě leží ve výši vrcholu V.



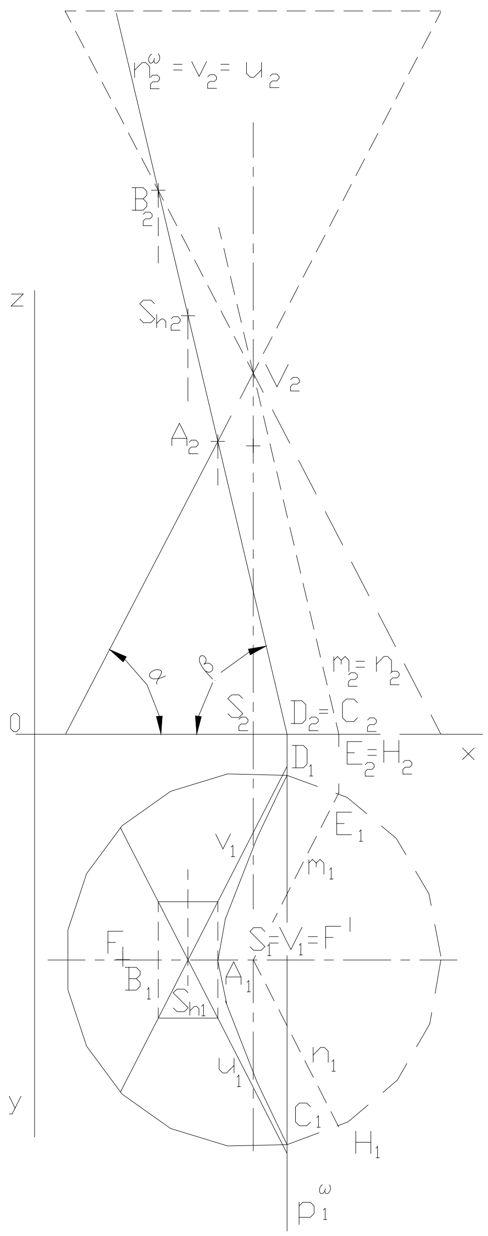
Druhý způsob řešení- sestrojení hyperboly řezu bodovou konstrukcí.

V prvém i druhém průmětu sestrojíme body hyperboly dané rovinou řezu a podstavy - A a B. Sestrojíme osu hyperboly a asymptoty obdobně jako v předcházejícím příkladě. Zrcadlově sestrojíme vrchol druhé větve hyperboly bod C a obě ohniska.

Tím je hyperbola určená a můžeme provést bodovou konstrukci hyperboly. Vrchol hyperboly sestrojíme opět pomocí oskulační kružnice.

Posouzení obou způsobů řešení:

Prvý způsob je konstrukčně nenáročný a poměrně přesný. Nevýhodou může být menší přehlednost. Druhý způsob je přehlednější, ale s velkými nároky na přesnost kreslení konstrukce hyperboly.



Úloha:

Sestrojte řez přímým kuželem, který má podstavu v půdorysně, rovinou ω, která je kolmá k nárysně.

Rozbor:

Úhel roviny řezu β je větší než úhel povrchové přímky α, křivka řezu je hyperbola. V druhém průmětu se bude řez jevit jako přímka, v prvém jako hyperbola.

Konstrukci můžeme opět provést dvěma způsoby - pomocí rovin, které říznou kužel v kružnici (rovina řezu rovnoběžná s podstavou) a průsečíky kružnic s rovinou řezu určují body hyperboly. Druhý způsob je opět pomocí bodové konstrukce, který byl použit.

Řešení:

Ze zadání vidíme tři body hyperboly - bod D a C - kde rovina ω protíná podstavu hyperboly. V druhém průmětu je to vrchol hyperboly - bod A, který leží na obrysové přímce kužele v prvém průmětu totožné s vodorovnou osou podstavy kužele. Hyperbola se skládá ze dvou větví - druhá větev je v kuželu souměrně sdruženém podél přímky procházející vrcholem. Prodloužíme stopu roviny i do tohoto kužele. Vrchol druhé větve je v bodě B a střed hyperboly S_h je v polovině úsečky |AB|.

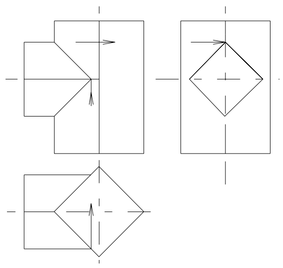
K sestrojení asymptot použijeme opět vrcholovou rovinu, která řízne kužel v trojúhelníku VEH a na povrchu určí povrchové přímky m a n . S těmito přímkami jsou asymptoty v a u rovnoběžné. Sestrojíme charakteristický čtyřúhelník a opsaná kružnice určí ohniska. Tím je hyperbola plně zadaná a ke konstrukci postačuje určit oskulační kružnici a další dva body hyperboly.

5 Průniky těles

Mají-li dvě, nebo více těles určitou část společnou, říkáme, že se pronikají. Společná množina bodů se u těchto těles nazývá průnikem. Při konstrukci hledáme průnik povrchů těchto těles.

Z hlediska těles rozdělujeme průniky mnohostěnů (hranolů, jehlanů), průniky rotačních těles (válců, kuželů, koulí) a průnik mnohostěnů a rotačních těles. Konstrukce přesného průniku je potřebná především pro výrobu těles vyrobených z plechu. V současnosti se při výrobě těchto těles sice používají počítačové programy (AutoCAD), ale znalost principu konstrukce je potřebný k pochopení práce s výpočetní technikou.

5.1.1 Úplné průniky mnohostěnů



Úplné průniky nastávají, jestliže jedno těleso prostupuje plně druhým. Při konstrukci průsečné čáry povrchů těles se hledá průsečík jednotlivých hran mnohostěnů, protože průsečná čára je přímka. Tím se úloha redukuje na sestrojení průsečíku přímky (hrany mnohostěnu) s rovinou (stěnou mnohostěnu).

Průnik se značně zjednodušuje, jestliže tělesa mají takovou polohu, že jejich **hrany jsou rovnoběžné s průmětnami.** V tomto případě vidíme průnik přímo a není nutná žádná zvláštní konstrukce. Příkladem může být průnik dvou hranolů s čtvercovou podstavou, kde k sestrojení průniku použijeme promítací paprsky (naznačeno;).

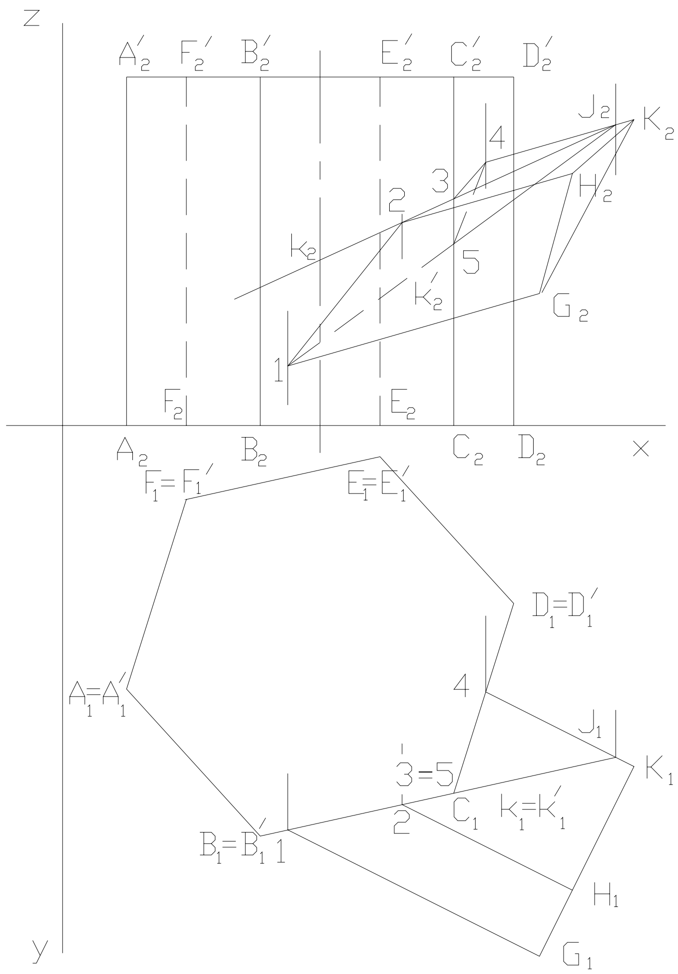
Průnik je též poměrně jednoduchý, jestliže jeden z mnohostěnů má hrany rovnoběžné s průmětnou a druhý různoběžné.

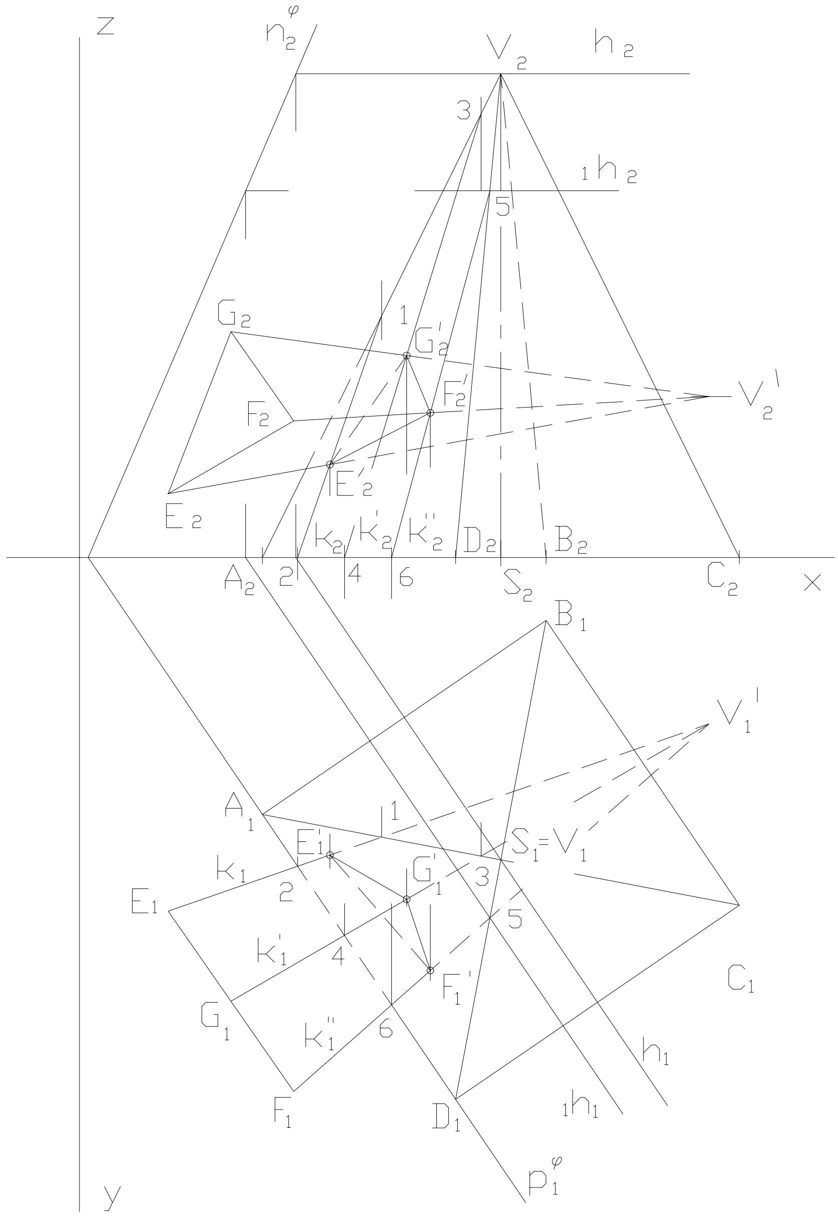
Úloha: Sestrojte jednostranný průnik šestibokého přímého hranolu s podstavou ABCDEF v prvé průmětně a tříbokého přímého hranolu GHK. Druhá základna tříbokého hranolu G´H´K´ není zobrazena.

Rozbor:

V prvém průmětu je průnik zobrazen, protože roviny pláště hranolu jsou kolmé k prvé průmětně. Průnik je nutné zkonstruovat v druhém průmětu.

Řešení : V prvém průmětu provedeme očíslování bodů průniku. Hrana |GG´| proniká šestiboký hranol v bodě 1 a tento bod můžeme převést pomocí ordinály do druhého průmětu. Stejně se konstruují průniky dalších hran tříbokého hranolu. Průnik hrany |CC´| šestibokého hranolu 3 a 5 je nutné sestrojit pomocí krycích přímek k a k´. V prvém průmětu jsou tyto přímky shodné s hranou |BC|, ale leží na plášti tříbokého hranolu. - prochází tedy body průniku 2 (k) a 1 (k´). Hranu |KK´| protínají v bodě J. Sestrojíme krycí přímky v druhém průmětu a tím jsou učeny body 3 a 5.





Úloha:

Sestrojte jednostranný průnik jehlanů. Jehlan ABCDV - přímý, podstava čtverec v prvé průmětně. Jehlan EFGV´ proniká z jedné strany.

Rozbor:

K sestrojení průniku použijeme krycí přímky totožné s hranami jehlanu v prvém průmětu. Natočení čtyřbokého jehlanu je takové, že neumožňuje přenést průsečík 5 použité kry-cí přímky <u>k</u>´´ pomocí ordinály. Proto použijeme hlavní přímku roviny φ = AVD, kde známe p_1 = AD. Pomocí hlavní přímky <u>h</u> procházející vrcholem V určíme nárysný stopník a zkonstruujeme n_2 roviny φ.

Řešení:

Prvým průmětem hrany |EV´| proložíme krycí přímku <u>k</u>. Krycí přímka protíná hranu |AV| v bodě 1 a hranu |AD| v bodě 2. Sestrojíme druhý průmět krycí přímky <u>k</u>. Kde krycí přímka protne hranu jehlanu |EV´|, je bod průniku E´.

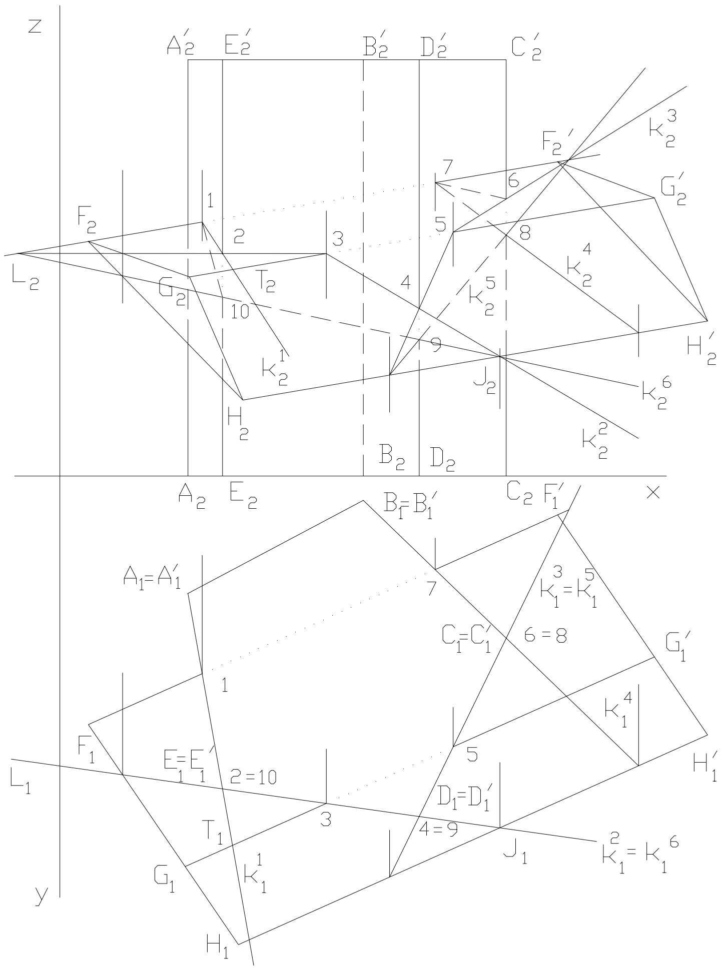
Obdobně postupujeme i u dalších hran jehlanu - |GV´| a |FV´|.

5. 1.2 Neúplný průnik hranolu

U neúplného průniku máme části těles, které se průniku neúčastní. Těmto částem říkáme liché. Průnikový mnohoúhelník (u oblých těles křivka) je jeden a neexistuje jednostranný průnik. Metody řešení jsou stejné jako v předchozích příkladech úplného průniku. Body průnikové křivky je vhodné očíslovat v pořadí postupně za sebou.

Úloha:

Sestrojte průnik pětibokého přímého a tříbokého šikmého hranolu.



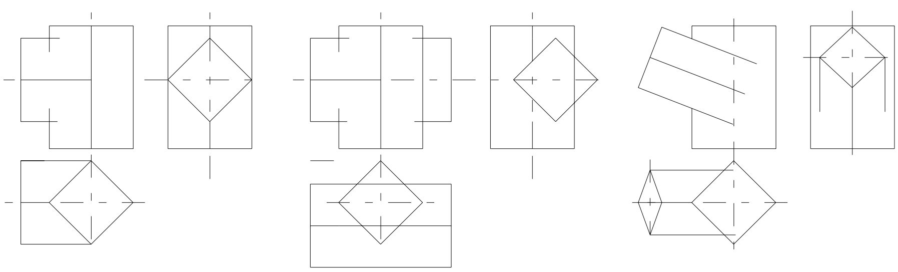
Rozbor:

Průnik hran tříbokého hranolu do pětibokého vidíme v prvém průmětu. Do druhého průmětu body průniku přeneseme pomocí ordinál. Průnik pětibokého do tříbokého hranolu sestrojíme pomocí krycích přímek.

Řešení: Nejprve sestrojíme body průnikové křivky hran šikmého hranolu 1, 3, 5, 7. Tyto body vidíme v prvém průmětu přímo a do druhého je převedeme. Průniky hran |EE´| - 2, 10, |DD´| - 4, 9, |CC´| - 6, 8 sestrojíme pomocí krycích přímek. K sestrojení bodu 2 použijeme krycí přímku $\underline{k}^{1}$, která leží v rovině FGG´- prochází bodem 1 a protíná hranu |GG´|. V prvém průmětu se jeví tato přímka jako pokračování hrany AE. Přímku převedeme do druhého průmětu kde prochází bodem 1 a průsečíkem s hranou |GG´|, který přeneseme z prvého průmětu. Průsečíkem krycí přímky a hrany |EE´| je bod 2. Obdobně postupujeme i u dalších bodů průniku hran přímého hranolu.

Jestliže chceme ověřit správnost řešení, provedeme to řezem tříbokého hranolu některou rovinou hranolu pětibokého – např. EDD´. V prvém průmětu se tato rovina jeví jako přímka, která je totožná s krycími přímkami $\underline{k}^{2}$, $\underline{k}^{6}$ a přímkou procházející body $\underline{2}$ a $\underline{3}$. Tyto přímky vytvářejí v druhém průmětu trojúhelník řezu s vrcholy na hranách hranolu – JL3, který určí body 4, 9, 2, 10. Průnik je možné konstruovat i pomocí této metody.

Příklady jednoduchých průniků na procvičení:



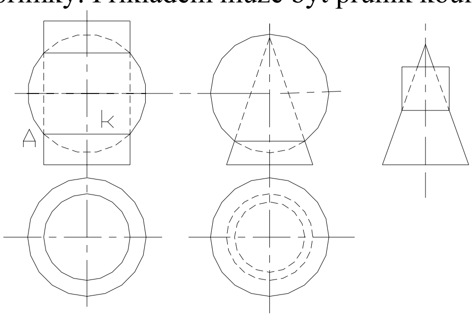
5.2 Průniky rotačních těles

Sestrojení průniků rotačních těles provádíme využitím povrchových přímek, nebo vhodně volených pomocných ploch. Plochy používáme buď rovinné, nebo kulové.

Druhy průniků rozdělujeme podle polohy os těles. Osy mohou být totožné - nejjednodušší průniky, rovnoběžné, různoběžné a mimoběžné.

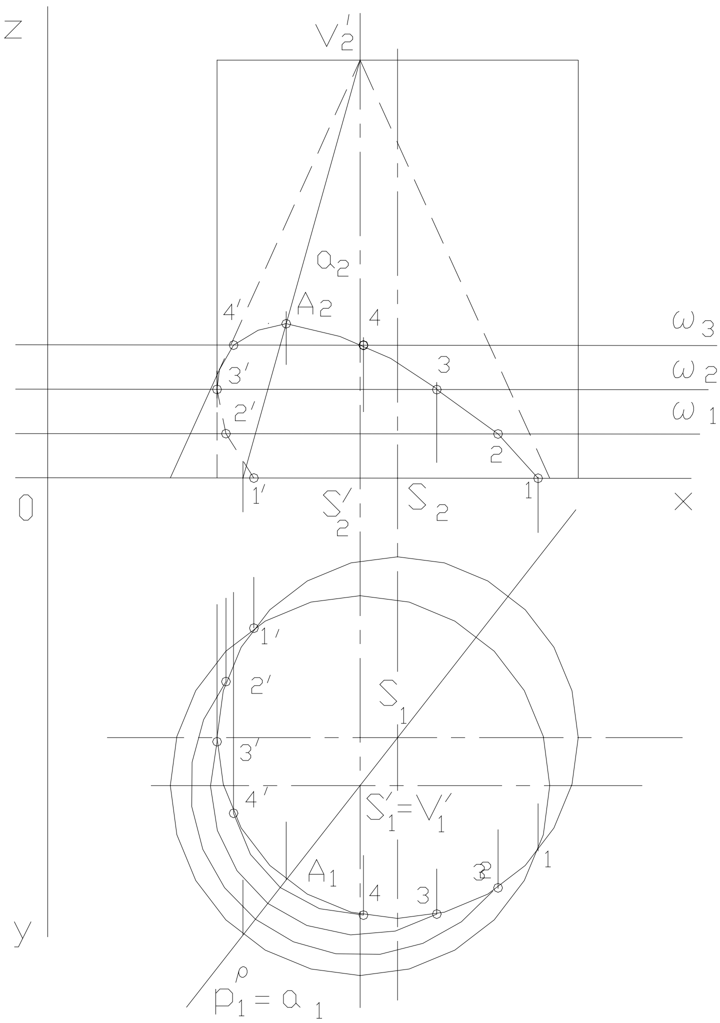
5.2.1 Průniky rotačních těles s osami totožnými

Tyto průniky jsou velmi jednoduché, protože průnikové křivky jsou kružnice a jeví se zpravidla jako přímky. Příkladem může být průnik koule a válce, kužele a koule, kužele a válce - viz příklad.



Při řešení vycházíme z těchto předpokladů: Jestliže například válec a koule mají společný bod A, který neleží na ose rotace, pak musí mít i společnou kružnici k, kterou opíše při rotaci bod A. Právě tato kružnice je průniková křivka.

Tento předpoklad používáme i pro řešení průniku rotačních těles s osami různoběžnými pomocí kulových ploch.



5.2.2 Průniky rotačních těles s osami rovnoběžnými

Body průnikové křivky sestrojíme pomocí vhodně volených rovin řezu, které rozříznou obě tělesa v jednoduchých plochách.

Příklad : Sestrojte průnik válcem a kuželem s rovnoběžnými osami..

Rozbor: Rovina, která jednoduše protne obě tělesa v kružnici je rovina rovnoběžná s podstavou válce a kužele.

Řešení: Nejprve sestrojíme vrchol průnikové křivky. Bude ležet v rovině ρ, která je dána osami válce a kužele. Sestrojíme půdorysnou stopu této roviny ρ. V této rovině leží též povrchová přímka kužele a, na které je vrchol křivky průniku A.

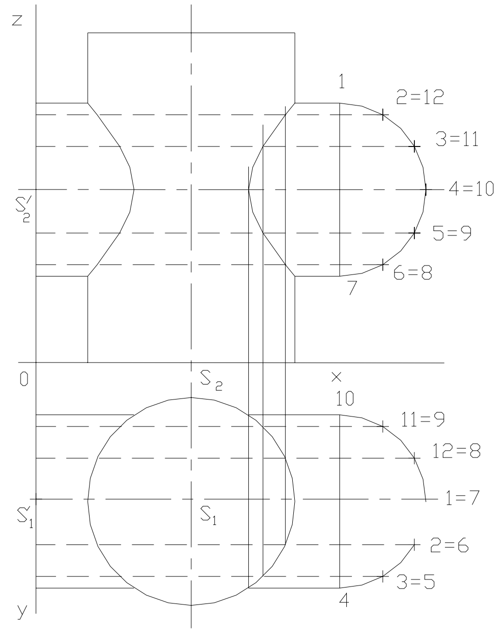
Vedeme několik rovin ω rovnoběžných s podstavou a sestrojíme body, v kterých kružnice řezu kužele protínají kružnici řezu válce (body 1, 2, 3, 4 a 1´,2´, 3´, 4´). Tyto body určují křivku průniku.

5.2.3 Průnik rotačních těles s osami různoběžnými

V praxi je tento typ průniků nejčastější - různé odbočky potrubí. Řešení průniku můžeme provést:

- pomocí povrchových přímek
- pomocí řezných rovin jako v minulých úlohách.
- pomocí kulových ploch.

Ukážeme si na stejném zadání všechny tři způsoby řešení - průnik dvou válců různého průměru. Svislý válec má větší průměr a vodorovný menší průměr.



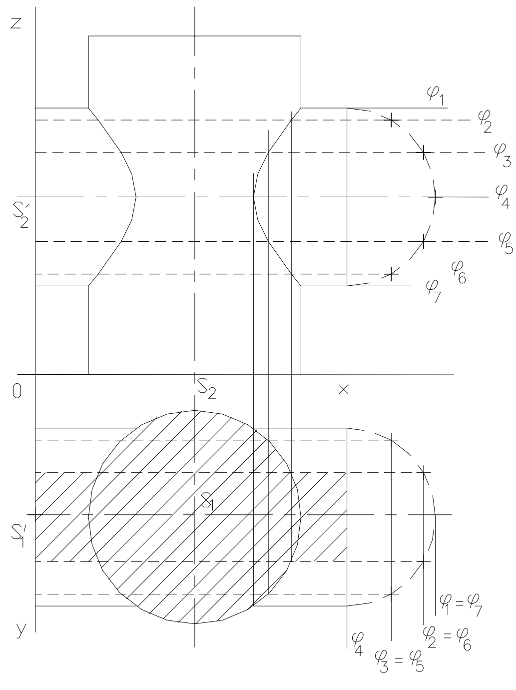
Sestrojení průniku pomocí povrchových přímek

Rozbor:

V prvém průmětu je průniková křivka shodná s průmětem pronikaného tělesa. Průnik konstruujeme v druhém průmětu. Na tělese, které plně proniká druhé těleso, tedy na válci menšího průměru sestrojíme síť povrchových přímek a hledáme průsečíky těchto přímek s druhým tělesem, válcem většího průměru.

Řešení:

Povrchové přímky naneseme na válec pravidelně. Sklopíme si podstavu válce do roviny rovnoběžné s průmětnou (stačí polovina podstavy). Rozdělíme ji na 12 dílů a očíslujeme jednotlivé povrchové přímky. Zde je nutné si uvědomit, že číslování přímek v prvém průmětu musí odpovídat číslování v druhém průmětu. V prvém průmětu vidíme průsečíky povrchových přímek s druhým válcem. Průsečíky přeneseme do druhého průmětu a tím je určena křivka průniku válců. Povrchové přímky můžeme využít k sestrojení sítě.



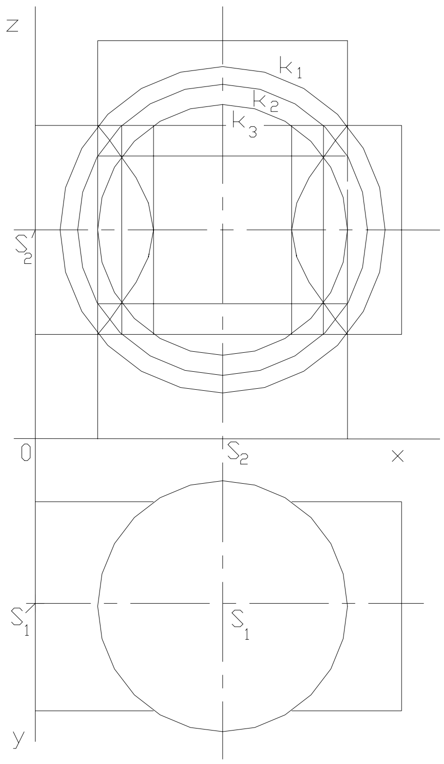
Sestrojení průniku pomocí řezných rovin

Rozbor:

K sestrojení průnikové křivky použijeme roviny, které rozříznou obě tělesa v jednoduchých plochách (obdobně jako v 5.2.2). Můžeme použít roviny rovnoběžné s prvou, nebo druhou průmětnou.

Řešení:

Řezy byly provedeny rovinami φ_1 až φ_7 - rovnoběžné s prvou průmětnou. Řezy byly vedeny pravidelně tak, jak odpovídá rozdělení sklopené podstavy na 12 dílů. Roviny při řezu vytvoří povrchové přímky, které můžeme použít pro sestrojení sítě.



Sestrojení průniku pomocí kulových ploch

Rozbor:

Kulová plocha proniká rotační těleso v kružnici. Jestliže máme rotační tělesa s různoběžnými osami a střed kulové plochy je v průsečíku os, kružnice průniků kulové plochy s oběma válci se protínají na křivce průniku válců.

Řešení :

První kulová plocha, která určuje body průniku, je kulová plocha k_1, která prochází krajními body. Kružnice průniku jsou shodné s obrysem válců. Další kulová plocha k_2 protíná každý válec ve dvou kružnicích, které se jeví jako přímky, a v průsečíku jsou body křivky průniku. Poslední kulová plocha k_3 se dotýká stěny válce většího průměru - kružnice dotyku je shodná s osou - a protíná menší válec. Průsečíky těchto kružnic určují vrchol průnikové křivky.

Předností tohoto způsobu řešení je jeho produktivita - postačuje jeden průmět. Nevýhodou je menší přehlednost konstrukce - použitelné kulové plochy se průměrem často příliš neliší. Přesto například při konstrukci průniku kuželů je tato metoda velmi výhodná pro svoji jednoduchost.

5.2.4 Průnik rotačních a hranatých těles

Jestliže rotační těleso je válec, nebo kužel, průniková křivka hranatým tělesem je kuželosečka. Způsob řešení průniku obvykle provádíme opět pomocí řezných rovin (řez obdobně proveden i v 4.3). U této metody jsou největší problémy s konstrukcí vrcholu průnikové křivky, proto v příkladu volena rovina φ_5.

Úloha:

Sestrojte průnik souosého kužele a hranolu s čtvercovou podstavou.

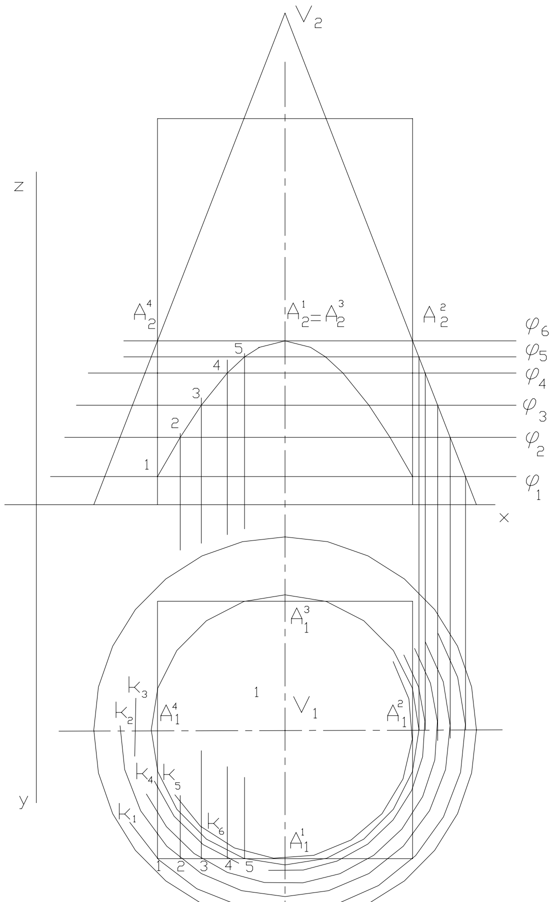
Rozbor:

Protože se jedná o průnik souosých těles a hranol má čtvercovou podstavu, všechny plochy hranolu budou pronikat kužel ve stejné křivce. Křivka je hyperbola.

Konstrukci budeme provádět pomocí řezných rovin (univerzálnější konstrukce). V tomto příkladu bychom mohli konstruovat hyperbolu průniku přímo, protože známe vrchol hyperboly (body A) a asymptoty (povrchové přímky kužele).

Řešení:

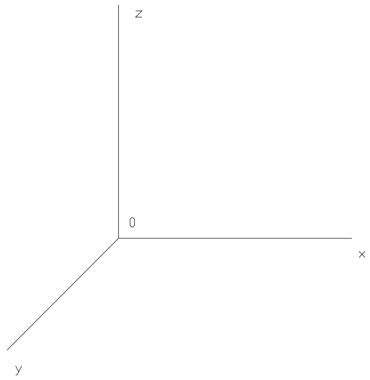
Byly zavedeny roviny řezu φ. V prvém průmětu byly sestrojeny kružnice řezu rovin kuželem k_1 až k_6. Tím byly určeny body průnikové křivky 1, 2 , 3, 4, 5 a bod A - vrchol.



6 Názorné zobrazování

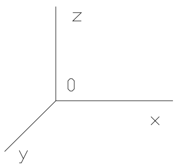
Pro moderní počítačové kreslení používáme taková zobrazení, která jsou srozumitelná téměř každému. Je to zobrazení těles tak, jak je vidíme. Při kreslení na počítači využíváme i barev (při stínování nebo rendrování). I nové výrobní výkresy jsou vytvořeny s názorným zobrazením hotové součásti, což bylo při konstrukčním (ručním) kreslení pro velkou pracnost nemožné. Proto je nutné získat základní poznatky o názorném zobrazování, abychom je mohli využít pro konstrukci a počítačové kreslení.

6.1 Souřadnicové systémy

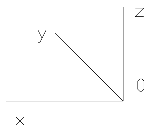


Souřadnicový systém názorného zobrazení je opět pravoúhlý souřadnicový systém (říkáme též souřadnicový kout). Zobrazení je ale složitější, protože se na tento systém díváme **šikmo** a proto se rozměry na jednotlivých osách mění – **zkracují.** Podle úhlu pohledu je zkrácení větší, nebo menší. Při konstrukčním kreslení byla snaha vytvořit takový systém, kde by se rozměry zkracovaly jen na některé ose – ose **y** - **kosoúhlé promítání** viz. obrázek. V tomto zobrazení se rozměry v druhé průmětně nekrátí a např. kružnice se zobrazuje opět jako kružnice. Zobrazení je proto poměrně výhodné z hlediska kreslení, protože je zde úzká vazba na Mongeovo promítání. Natočení osy **y** je obvykle v úhlu 135° a tomu odpovídá zkrácení na ose **y** - $z_y = 0,5$. Natočení může být i jiné, pak se mění zkrácení.

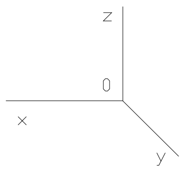
Na souřadnicový systém se můžeme podívat z různých směrů:



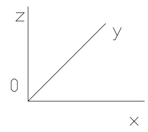
horní pohled zprava



dolní pohled zprava

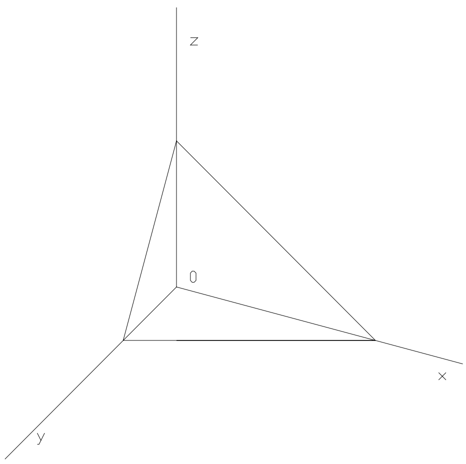


horní pohled zleva



dolní pohled zleva

Tyto pohledy na souřadnicový systém si můžeme nastavit v AutoCADu promocí příkazu OKO.

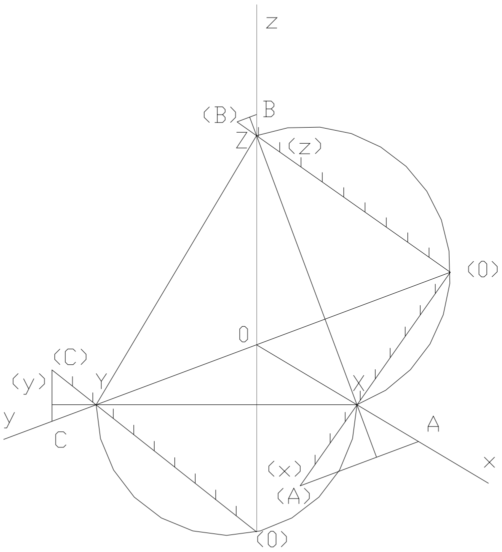


Kosoúhlé zobrazení není obecné. Souřadnicový systém vidíme obvykle v obecnější poloze. Zobrazení v obecném systému se nazývá **axonometrie.** I v tomto systému existuje rovina, v které se rozměry jeví ve skutečné velikosti. Tuto rovinu nazýváme **axonometrickou rovinou** (nebo průčelnou rovinou). Rovina protne souřadnicový systém v **axonometrickém trojúhelníku**, který je zobrazen ve skutečné velikosti.

Zkrácení na osách je v závislosti na natočení souřadnicového systému. I tento systém se používal v konstrukčním kreslení a tehdy se používal jako **axonometrická izometrie** – úhel mezi zobrazenými osami byl 120° a proto zkrácení bylo na všech osách stejné – $z_x = z_y = z_z = 0,8$. Zjednodušovalo se též tak, že měřítko zkrácení bylo 1 na všech osách.

6.2 Konstrukce zkrácení obecného systému

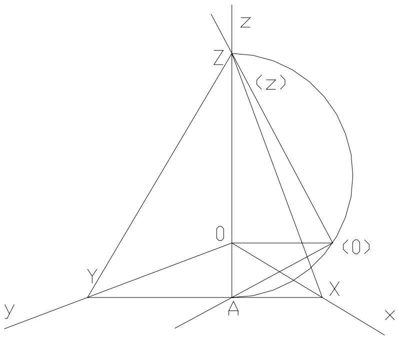
Vycházíme z toho, že souřadnicový systém je pravoúhlý a osy **x, y, z** jsou na sebe kolmé a jeví se zkresleně. Skutečné velikosti jsou jedině v axonometrické rovině.



Do axonometrické roviny otočíme trojúhelník X0Z a X0Y. Protože tyto trojúhelníky jsou pravoúhlé, ke konstrukci použijeme Thaletovu kružnici. Osa otáčení trojúhelníka X0Z je úsečka XZ a trojúhelníka X0Y úsečka XY. Počátek systému se otáčí po kružnici, která se jeví jako přímka kolmá k ose otáčení.

Sklopením jsme dostali sklopené osy (x), (y), (z), které jsou ve skutečné velikosti. Na sklopené osy naneseme 10 dílků stejné velikosti (např. v délce 1cm) a získáme body (A), (B), (C). Ty otočíme zpátky na skutečné osy a získáme body A, B, C. Úsečka |0A| určuje zkrácení na ose **x,** úsečka |0B| na ose **z**, úsečka |0C| na ose **y**.

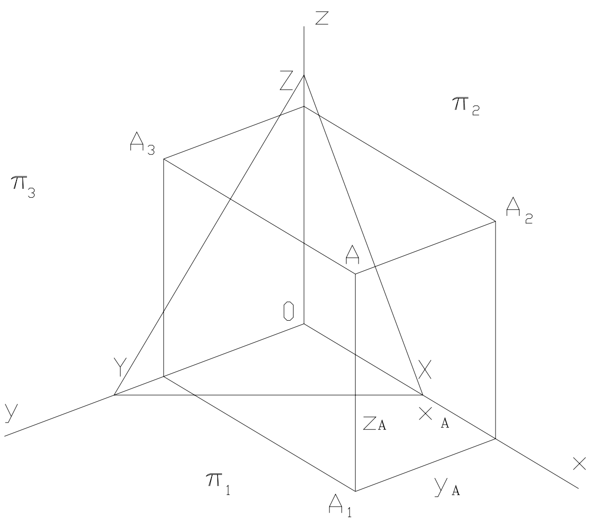
6.3 Vzdálenost axonometrické průmětny od počátku souřadnicového systému



Potřebujeme též zjistit vzdálenost axonometrické průmětny od počátku souřadnicového systému. Tu sestrojíme sklopením pravoúhlého trojúhelníka A0Z, který se promítá jako přímka. Opět použijeme k sestrojení Thaletovu kružnici. Osa otáčení trojúhelníka A0Z je úsečka AZ. Počátek souřadnicového systému se otáčí po kružnici, která se jeví jako přímka kolmá k ose otáčení a na Thaletově kružnici určí otočený počátek (0). Vzdálenost axonometrické průmětny je určena velikostí úsečky |0 (0)|.

Úhel mezi axonometrickou průmětnou a osou **z** je dán úhlem mezi úsečkou AZ a **(z)** – což je otočená osa **z**.

6.4 Axonometrické zobrazení bodu

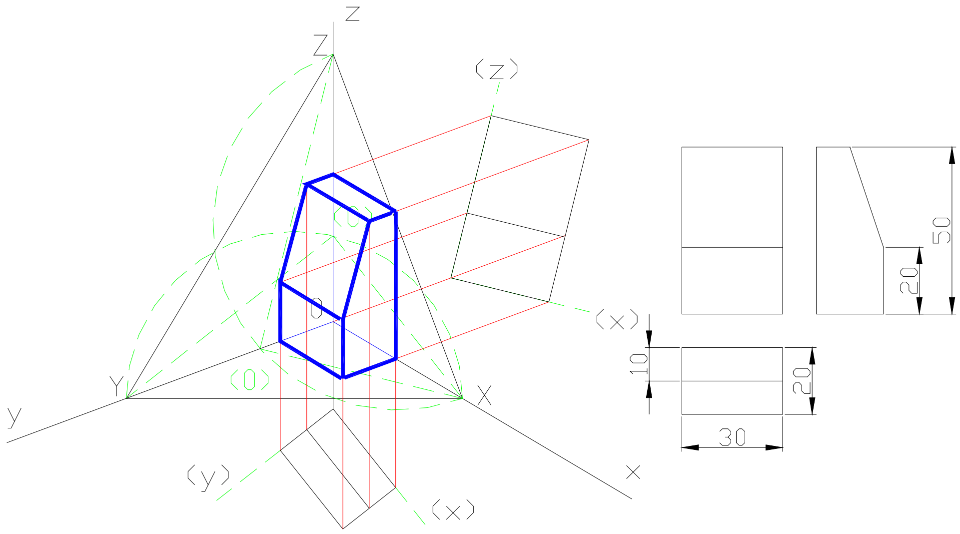


Poloha osy **z** je v axonometrickém souřadnicovém systému vždy svislá, natočení os **x** a **y** může být libovolné. Ale tuto libovůli si můžeme dovolit jen při kreslení na počítači. Konstrukce zkrácení je časově náročná, a proto je vhodné při konstrukčním kreslení využít zcela určitých poloh souřadnicového systému. Souřadnicový systém konstrukčně zadáváme axonometrickým trojúhelníkem XYZ. Osy prochází vrcholem trojúhelníka a jsou kolmé ke stranám trojúhelníka. Pro zobrazení je vhodný systém s velikostí stran |XY| = 10 , |XZ| = 11, |YZ| = 12. Zkrácení na ose **x** je $\mathbf{z_x = 0{,}7}$, na ose **y** je $\mathbf{z_y = 0{,}8}$, na ose **z** je $\mathbf{z_z = 0{,}9}$.
Bod je zadán obdobně jako v Mongeově promítání souřadnicemi A (x, y, z).

Souřadnice zkrátíme vynásobením součinitelem zkrácení a dostaneme hodnoty x_A, y_A, z_A , které potom naneseme ve směru osy **x, y, z** a získáme polohu **skutečného bodu A.** Sestrojíme průměty bodu A do jednotlivých průměten – z bodu A vedeme kolmé promítací paprsky (jsou rovnoběžné s jednotlivými osami) k průmětnám. Tím získáme prvý, druhý a třetí průmět bodu.

Bod můžeme zadat i pomocí dvou průmětů, nebo jednoho průmětu a skutečného bodu (zadání bodů leží v rovině rovnoběžné s průmětnou). Chybějící zobrazení bodu můžeme zkonstruovat.

6.5 Zářezová metoda



Zářezová metoda – převedení prvého a druhého průmětu tělesa na axonometrické zobrazení

Zářezovou metodu používáme k jednoduchému a rychlému názornému zobrazení těles v axonometrii převodem z Mongeova promítání. První tuto metodu použil rakouský geometr L. Eckhart v roce 1938. Princip je poměrně jednoduchý. Máme zobrazit v axonometrii těleso, které máme nakreslené a zakótované ve sdružených průmětech. V axonometrickém souřadnicovém systému provedeme sklopení trojúhelníka X0Y a X0Z– podobně, jako při konstrukci zkrácení. Otočení ale provedeme opačně. Získáme otočenou prvou a druhou průmětnu. Prvá průmětna π_1 dána osami (x) (y) a druhou, π_2 , určují osy (x)(z). Otočený souřadnicový systém posuneme - π_1 ve směru osy **z** a π_2 ve směru osy **y**. V otočených souřadnicových systémech nakreslíme prvý a druhý průmět zobrazovaného tělesa a pomocí promítacích paprsků převedeme zpět do axonometrického souřadnicového systému. Při převedení dojde ke zkrácení rozměrů na jednotlivých osách.

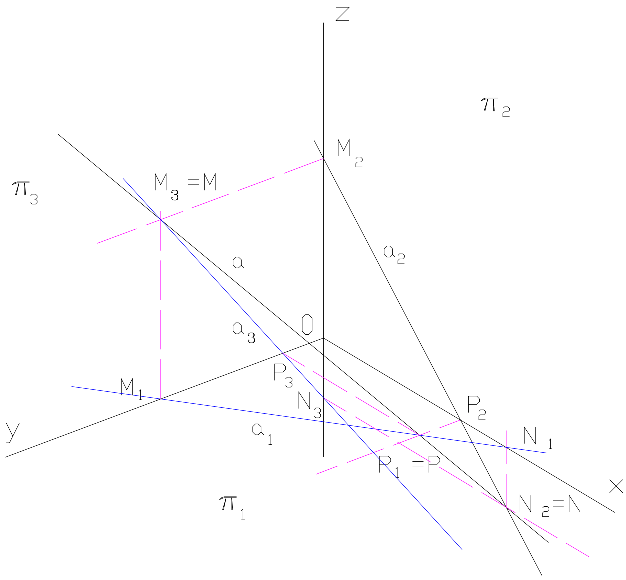
6.6 Konstrukční metody a zobrazování v axonometrii

V axonomertii používáme všechny základní pojmy, které jsou známé z Mongeova promítání, jako stopník, stopa roviny, hlavní a krycí přímka atd. Rovněž označení je obdobné. Rozdíl je v zobrazení skutečných bodu, přímek, těles a v zobrazení třetího průmětu – bokorysu. Ten byl v Mongeově promítání používán výjimečně. Proto základní pojmy budou brány jako všeobecně známé.

6.7 Zobrazení přímky

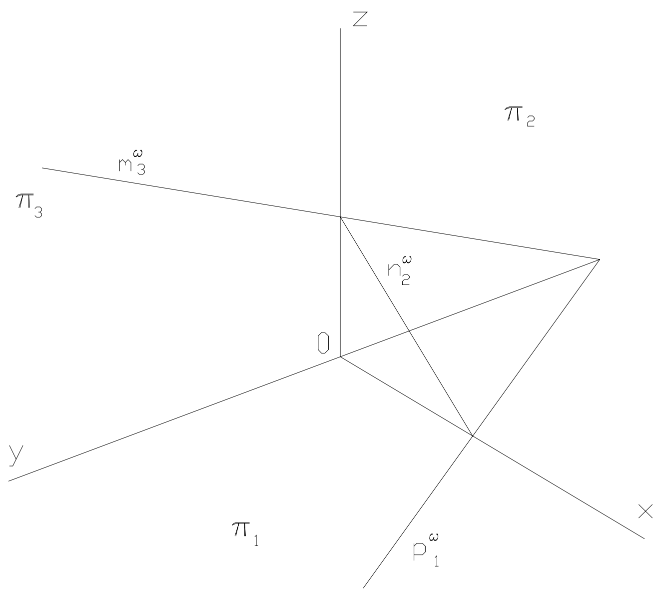
Přímka je zadána svým skutečným zobrazením - a a druhým průmětem – a_2. Máme sestrojit chybějící průměty a stopníky.

Vycházíme z druhého průmětu přímky - a_2. Ten nám určí v místě, kde druhý průmět přímky protíná první průmětnu π_1 půdorysný stopník – P_2 a kde protíná třetí průmětnu π_3 bokorysný stopník M_2. Průměty stopníků převedeme pomocí promítacích paprsků na přímku a a dostaneme skutečné stopníky $P=P_1$ a $M=M_3$, které jsou též průměty stopníků. Kde se a_2 protne s a je nárysný stopník N**.** Pomocí



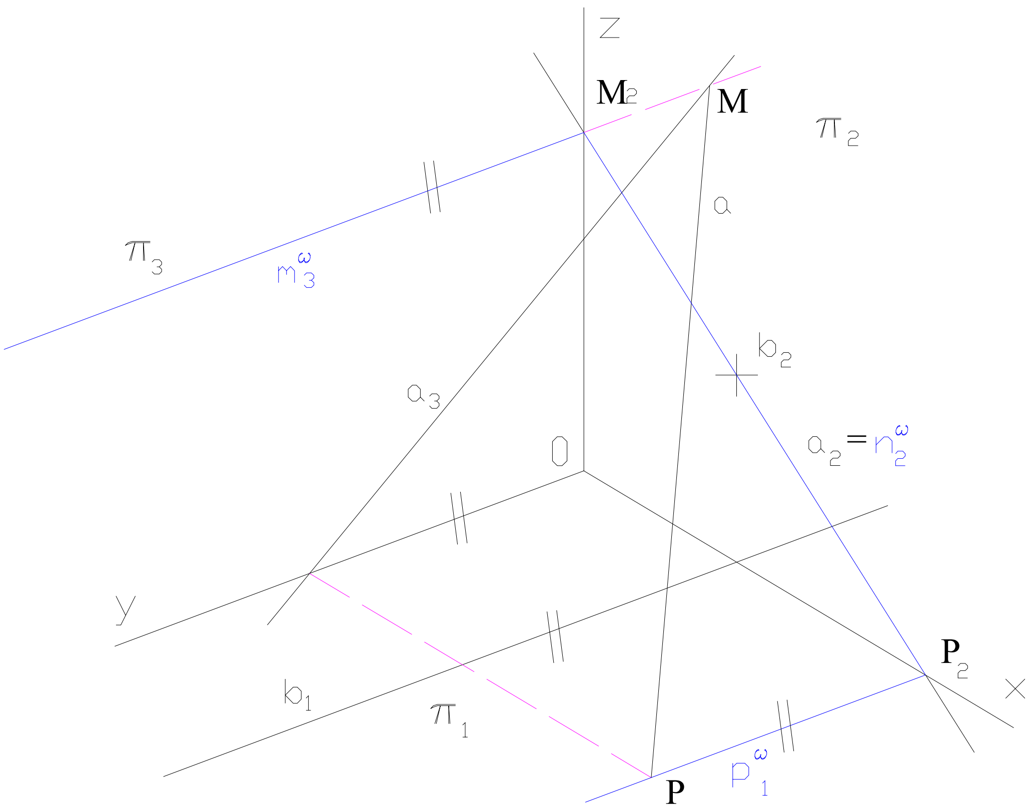
promítacích paprsků provedeme převedení do jednotlivých průmětů. Měřítko správnosti – každý průmět přímky prochází všemi třemi stopníky v příslušném průmětu.

6.8 Zobrazení roviny



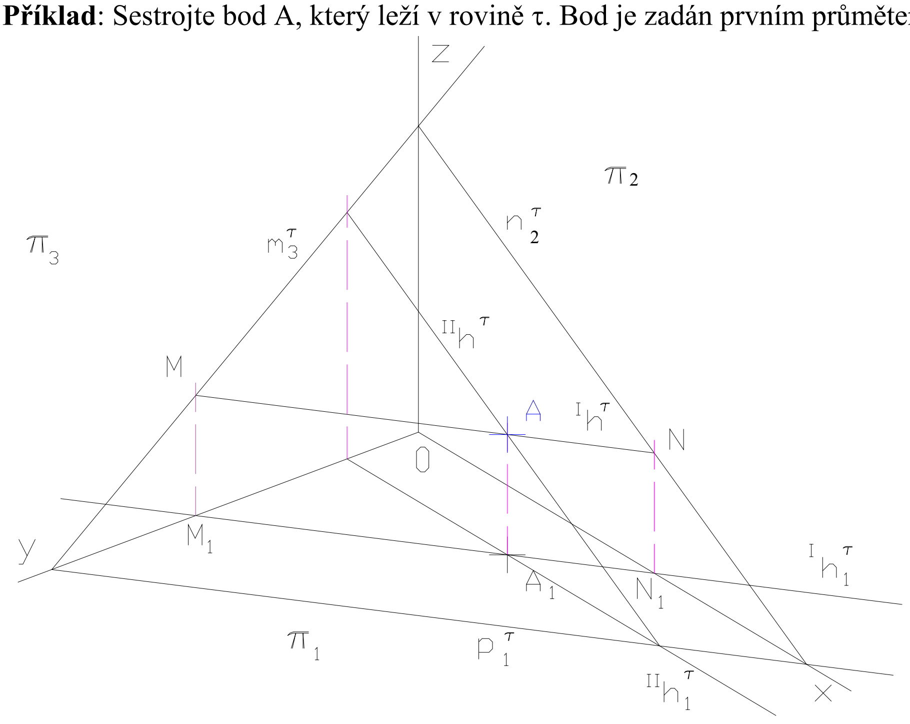
Rovinu v axonometrii můžeme zobrazit pomocí stop. Dvě a dvě stopy se protínají na osách souřadnicového systému. Proto k zadání roviny jsou potřebné dvě stopy, třetí je jimi určena.
Zadat rovinu můžeme i dalšími způsoby, kterými určujeme rovinu. Zadání ale není tak názorné, a proto obvykle provádíme i v těchto případech konstrukci stop.
Potřebujeme-li určit rovinu po-mocí souřadnic, používáme opět určení pomocí průsečíků stop na souřadnicových osách.
Rovněž v axonometrii jsou roviny, které mají zvláštní polohu – rovnoběžné s některou průmětnou, s osou souřadnicového systému (kolmé k průmětně) atd.

Příklad : Sestrojte stopy roviny zadané dvěmi různoběžnými přímkami.
Rovina ω je zadání pomocí přímky a – třetí a druhý průmět, a přímky b – prvý a druhý průmět. Sestrojte stopy roviny.
Rozbor:
Přímka b je rovnoběžná s osou y – **je kolmá** k π_2 , proto se druhý průmět této přímky jeví jako bod. Jestliže přímka b je kolmá k π_2, bude rovina ω kolmá k π_2 – viz stereometrie. Půdorysná a bokorysná stopa musí být kolmé k π_2.
Řešení:
Určíme půdorysný a bokorysný stopník přímky a . Stopníky určují polohu půdorysné a bokorysné stopy.
Pro větší názornost je zkonstruována přímka a , její konstrukce ale není nutná.



Hlavní přímky roviny jsou v axonometrii tři – rovnoběžná s půdorysnou, nárysnou a bokorysnou stopou. Je libovolné, kterou hlavní přímku použijeme. Hlavní přímky budeme používat především k určení polohy bodu v rovině a konstrukci jeho průmětů, dále ke konstrukci rovnoběžné roviny s danou rovinou.

Příklad: Sestrojte bod A, který leží v rovině τ. Bod je zadán prvním průmětem.

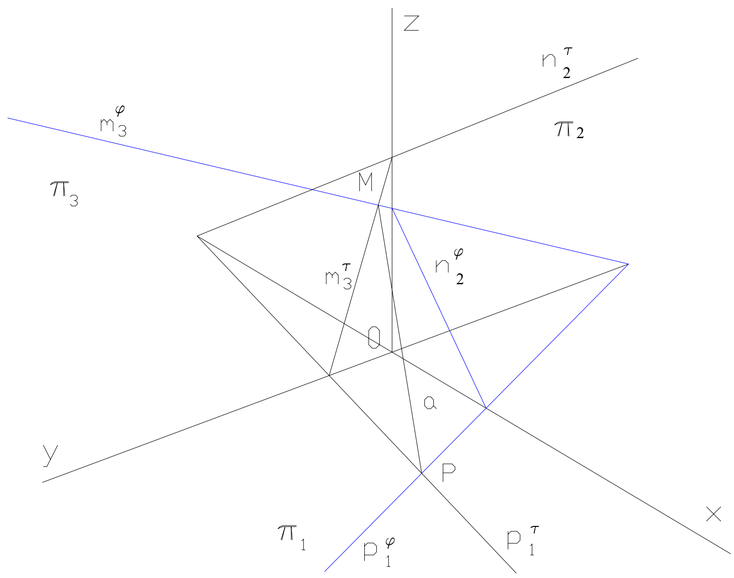


Průmětem A_1 vedeme hlavní přímku. První použijeme hlavní přímku prvé osnovy ${}^{I}h_1^{\tau}$, která je rovnoběžná s půdorysnou stopou. Určíme stopníky hlavní přímky – M_1 a N_1. Pomocí promítacích paprsků sestrojíme M a N hlavní přímky ${}^{I}h^{\tau}$ a sestrojíme hlavní přímku. Promítacím paprskem převedeme prvý průmět bodu na skutečný obraz hlavní přímky a tím je určen bod A.

Můžeme použít i hlavní přímku druhé osnovy – na obrázku naznačeno. Obdobně by se použila i hlavní přímka třetí osnovy – rovnoběžná s bokorysnou stopou.

6.9 Dvě roviny v axonometrii

Roviny jsou různoběžné – mají společnou přímku, průsečnici. Nebo jsou rovnoběžné – platí totéž, co v Mongeově promítání – stopy jsou rovnoběžné.



Příklad: Sestrojte průsečnici dvou různoběžných rovin - τ a φ.

Rozbor:

Konstrukce průsečnice je velice jednoduchá – vychází se ze stejného předpokladu jako v Mongeově promítání, že se stopy protínají. Tím jsou určeny body průsečnice.

Řešení:

V našem případě vycházíme z průsečíku bokorysných stop – bokorysný stopník průsečnice M, a průsečíku půdorysných stop – půdorysný stopník průsečnice P. Tyto body určují průsečnici **a.**

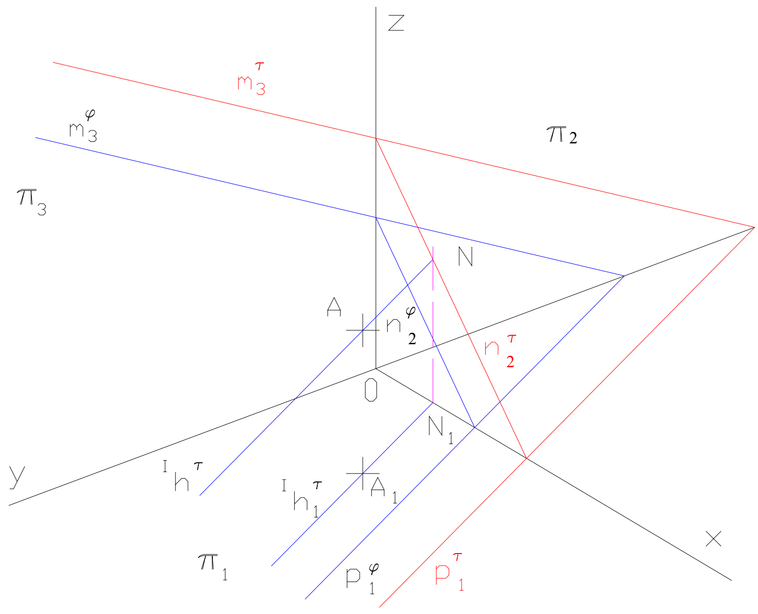
Příklad: Je dána rovina φ a bod A. Bod A∈τ , rovina τ je rovnoběžná s rovinou φ. Sestrojte rovinu τ.

Rozbor:

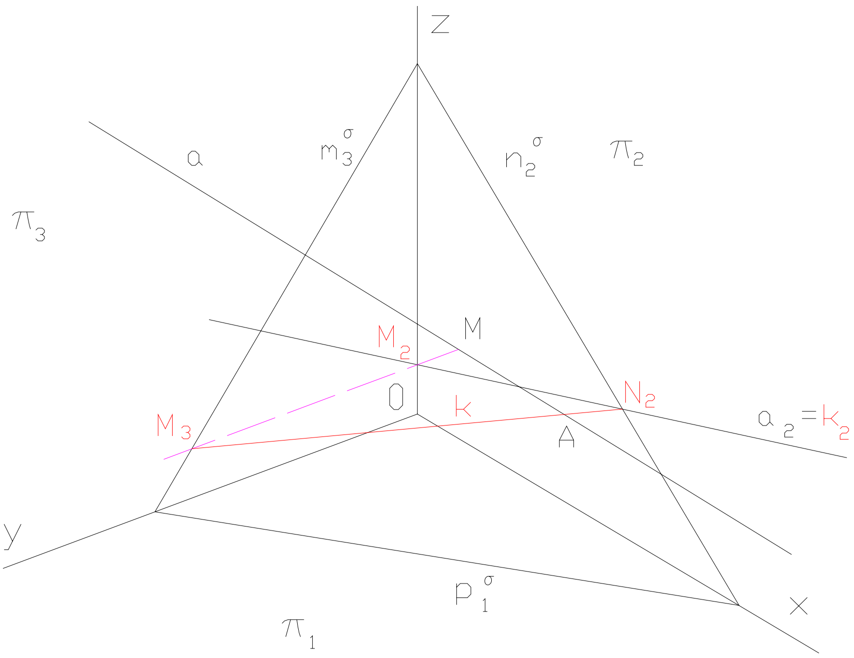
Jestliže jsou dvě roviny rovno-běžné, musí být v těchto rovinách dvě různé přímky rovnoběžné. Tyto přímky mohou být i stopy rovin, nebo hlavní přímky.

Řešení:

Bodem A, který je zadán prvním průmětem a axonometrickým prů-mětem vedeme hlavní přímku. Je použita hlavní přímka prvé osnovy. Sestrojíme její stopník – je použit nárysný. Stopníkem vedeme nárysnou stopu roviny τ a tím je určena poloha i dalších stop.



6.10 Průsečík přímky s rovinou



Průsečík přímky s rovinou konstruujeme obdobným způsobem jako v Mongeově promítání – pomocí krycí přímky.

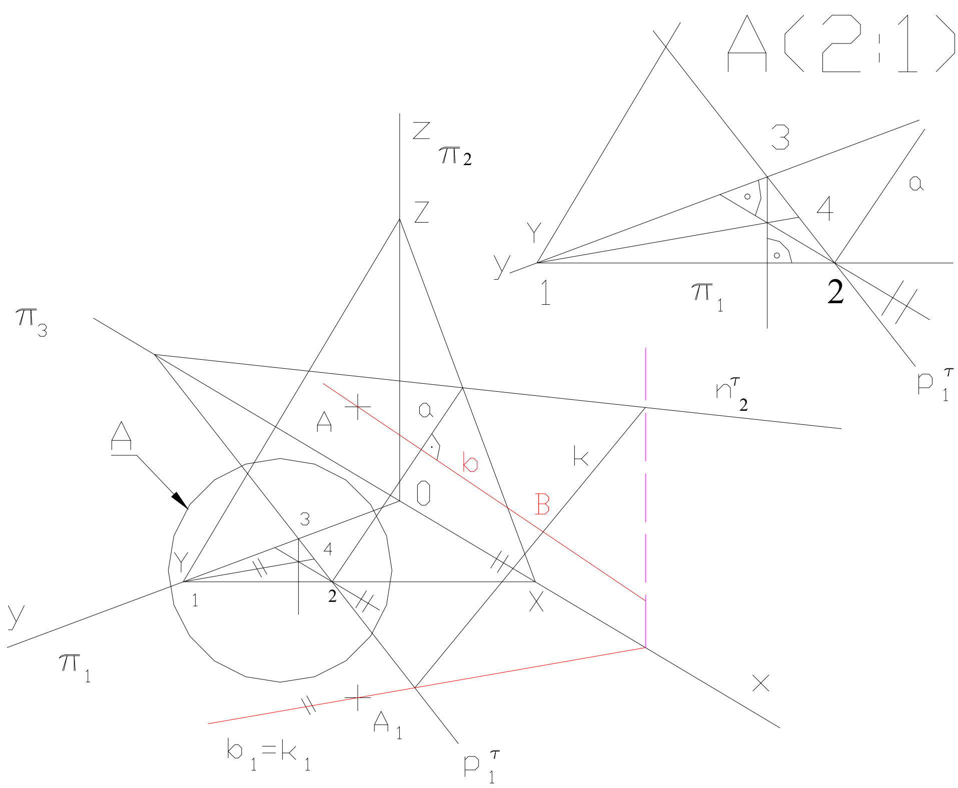
Příklad: Sestrojte průsečík přímky <u>a</u> s rovinou σ.

Druhým průmětem přímky <u>a</u> – <u>a_2</u> proložíme krycí přímku <u>k_2</u>. Sestrojíme stopníky krycí přímky N_2 a M_2 (M je stopníkem přímky <u>a</u>). Sestrojíme pomocí promítacího paprsku M_3.

Krycí přímka <u>k</u> = M_3N_2. Průsečík <u>k</u> a <u>a</u> je průsečík přímky <u>a</u> s rovinou σ - bod A.

6.11 Přímka kolmá k rovině

Detail konstrukce kolmice k p_1^τ



V Mongeově promítání se kolmice z daného bodu k rovině promítá jako kolmice ke stopě roviny. Rovněž v axonometrii lze toto využít v konstrukci axonometrického průmětu přímky. Zde se kolmice k rovině promítá jako přímka kolmá k průsečnici axonometrické roviny a roviny, ke které konstruujeme kolmici. Složitější je konstrukce kolmice v průmětu axonometrické přímky. Je možno postupovat dvěma způsoby:

1. Sklopíme příslušnou průmětnu i se stopou dané roviny a bodem, ve sklopené rovině sestrojíme průmět kolmice a pomocí afinity převedeme zpět. Konstrukce je ale dost pracná a nepřehledná. Pro převedení polygonů budeme ale též používat – viz 12.6.
2. Sestrojením směru přímky kolmé ke stopě roviny. V tomto případě se jeví jako nejvhodnější.

Princip konstrukce:

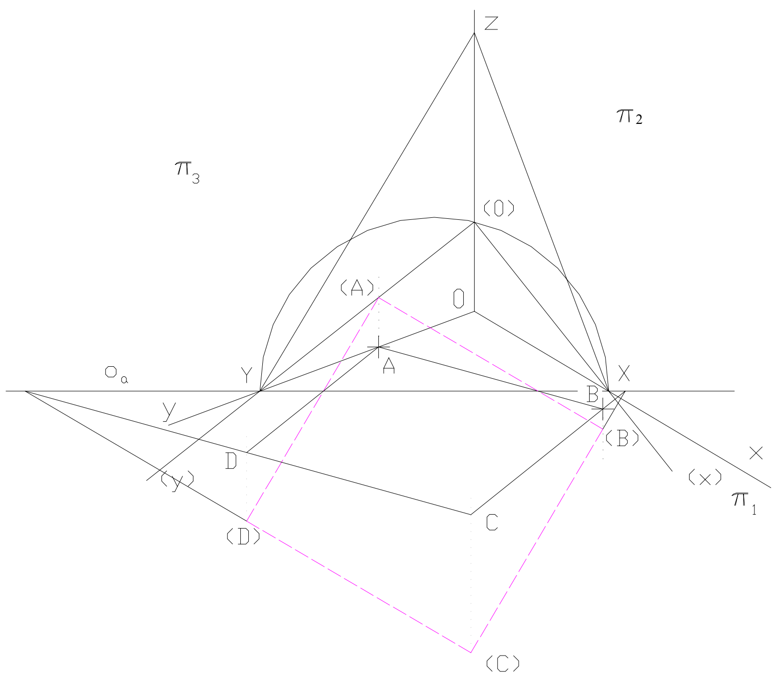
Po průniku roviny τ axonometrickou rovinou vznikne u osy y v π_1 trojúhelník 1 2 3. Jestliže sestrojíme kolmici z vrcholu 2 ke straně 1 3, je tato kolmice rovnoběžná s osou x souřadnicového systému. Kolmice je zároveň výškou v trojúhelníku. Obdobně sestrojíme kolmici ke straně 1 2 z vrcholu 3. Z geometrie trojúhelníka je známo, že výšky se protínají v jednom bodě. Proto můžeme sestrojit kolmici 1 4 ke straně 2 3, která leží na půdorysné stopě roviny p_1^{τ}, která určuje směr všech kolmic k této stopě z libovolného bodu π_1 (konstrukce je v následujícím příkladu zvětšena v detailu A).

Příklad: Sestrojte z bodu A kolmici $\underline{b}$ k rovině τ. Bod A je zadán axonometrickým a prvním průmětem. Sestrojte též průsečík kolmice s rovinou bod B.

Řešení:

Sestrojíme průsečnici axonometrické roviny a roviny τ. Z axonometrického průmětu bodu A sestrojíme kolmici k této průsečnici a získáme axonometrický průmět kolmice $\underline{b}$. Zbývá sestrojit průmět kolmice – $\underline{b}_1$. Použijeme konstrukci směru kolmice – v trojúhelníku 1 2 3. Je popsáno výše. Průmětem bodu A_1 vedeme rovnoběžku se směrem 1 4 a tím je určena $\underline{b}_1$. Pomocí krycí přímky $\underline{k}$ sestrojíme průsečík přímky $\underline{b}$ s rovinou τ bod B.

6.12 Převádění prvků ze sklopené průmětny systému do průmětny axonometrického souřadnicového pomocí afinity



Při konstrukci těles potřebujeme velmi často zkonstruovat mnohoúhelník, nebo zobrazit kružnici v průmětně axonometrického souřadnicového systému. Nejjednodušší způsob je převedení prvků pomocí pravoúhlé afinity ze sklopené průmětny, kde se jeví ve skutečné velikosti. Při sklápění průmětny je osa otáčení YX osou afinity o_a. Odpovídající body jsou buď body na osách – v našem případě bod A a (A), nebo můžeme použít počátek souřadnicového systému 0 a (0). Pro konstrukci není podstatné, jak souřadnicový systém otočíme, zda nahoru (v ukázce kon-strukce), nebo dolů.

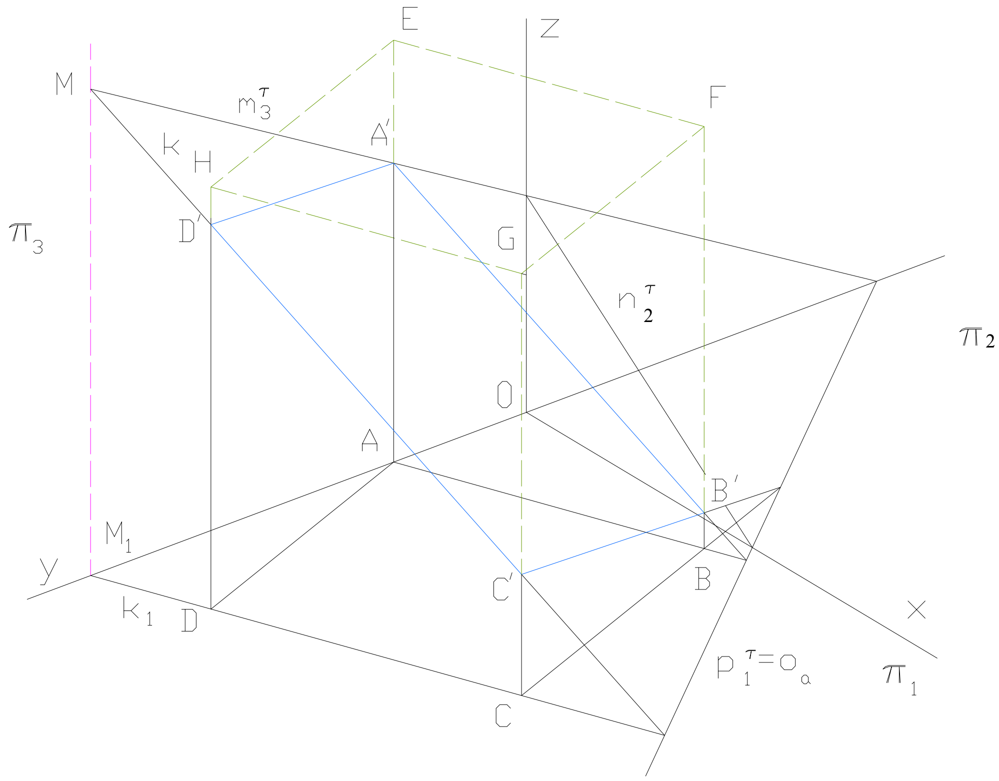
6.13 Řez hranatými tělesy

Sestrojení řezu hranatými tělesy v axonometrii je obdobné jako v Mongeově promítání. Sestrojení můžeme provést:

- Sestrojením průsečíku roviny řezu s hranami tělesa – použijeme metodu průsečíku přímky s rovinou
- Sestrojení průsečnice roviny řezu se stěnami mnohostěnu – použijeme buď afinitu – u hranolů, nebo kolineaci – u jehlanů.

Příklad:

Sestrojte řez přímým hranolem ABCDEFGH rovinou τ . Podstava hranolu ABCD je čtverec v π_1, bod $A \in y$.



Rozbor:

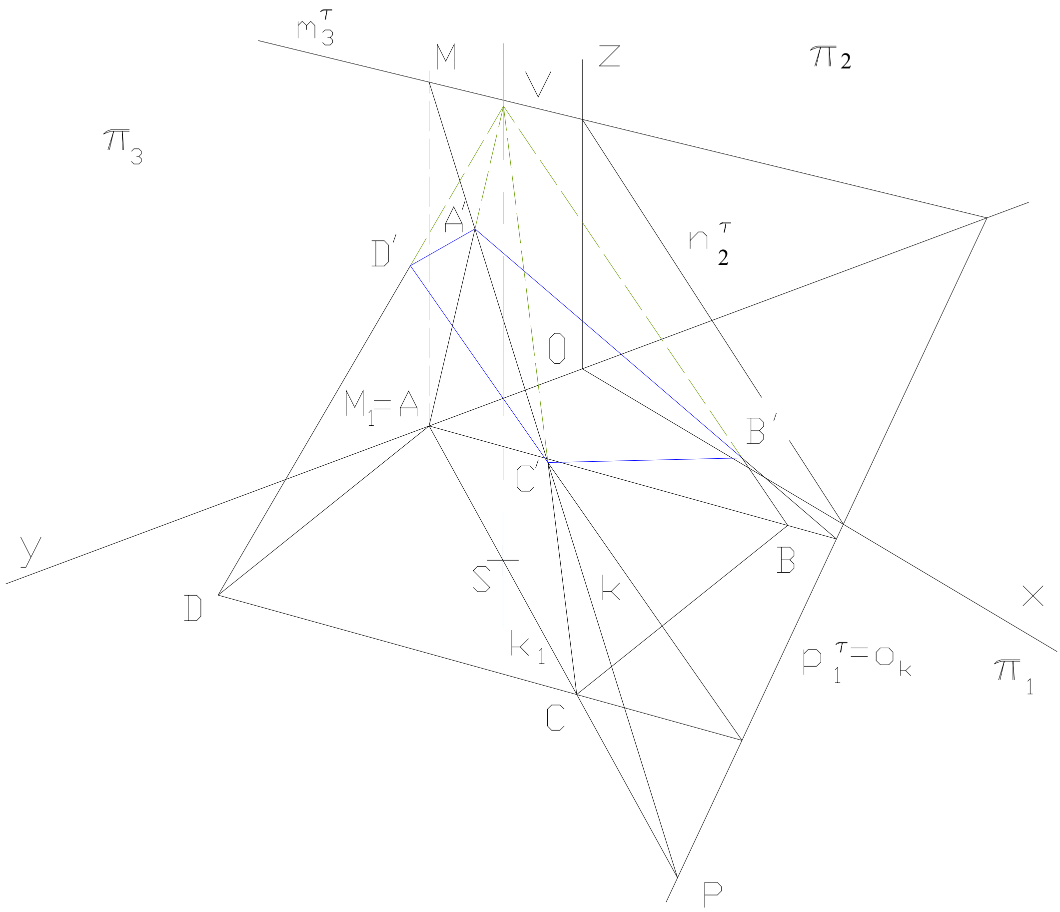
Obecně sestrojíme průsečík jedné hrany hranolu s rovinou τ. Průsečíky ostatních hran sestrojíme **afinitou**.

Řešení:

Bod $A \in y$, proto bod roviny řezu $A' \in m_3^\tau$.

Bod A´ můžeme použít pro konstrukci bodu B´. Ke konstrukci použijeme afinitu. Osa afinity je půdorysná stopa roviny τ. Další konstrukční využití není možné, protože konstrukce by nebyla přesná. Proto by bylo výhodnější a rychlejší začít konstrukci řezu sestrojením průsečíku hrany DH, bodem D´. Protože hranol je přímý, krycí přímku k vedeme v rovině CDH. Krycí přímka zároveň určí polohu bodu C´. Pro dokončení řezu využijeme afinitu – bod B´. Je možné využití i znalostí ze stereometrie – hrana C´B´je rovnoběžná se stranou D´A´, což se může pro konstrukci využít, v tomto případě ale ke kontrole správnosti**.** V ostatních případech může být využití užitečné, protože průsečík DA s osou afinity může být nedostupný. **Pozor –** je nutné si uvědomit, že rovnoběžnost lze využít pouze tehdy, když se jedná o průsečnice dvou rovnoběžných rovin s rovinou třetí.

Příklad: Sestrojte řez přímým čtyřbokým jehlanem rovinou τ. Podstava jehlanu je čtverec ABCD v π_1, bod $A \in y$. Výška jehlanu v.



Rozbor:

Způsob konstrukce řezu je podobný jako u hranolu. Sestrojíme průsečík jedné hrany a ostatní průsečíky hran sestrojíme pomocí **kolineace**

Řešení:

Vhodně volíme krycí přímku. Průmět krycí přímky k u řezu přímého jehlanu může být shodný s průmětem dvou stran – AV a CV (**pouze u přímého jehlanu**). Potom krycí přímka určuje bod řezu A´ a C´. Zbývající body řezu na hranách DV a BV určíme pomocí kolineace.

7 Rovinné křivky

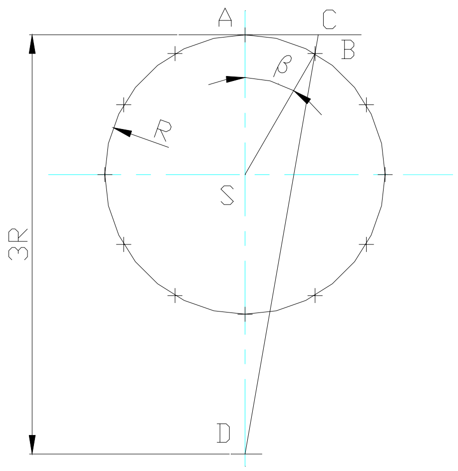
Křivky jsou v technice značně využívány při konstrukci různých technických prvků – lopatky čerpadel, zuby ozubených kol, závity atd. Proto je pro technika nutná znalost těchto křivek a jejich konstrukce. Je především potřebné znát způsob vzniku křivky, protože to mnohdy určuje i užití křivky. Zobrazení křivky je možné provést jednak ze znalosti způsobu vzniku křivky geometrickým způsobem. Druhým způsobem je naprogramování do počítače na základě matematického vyjádření (každá křivka má svoji rovnici) – například v AutoLISPu a vykreslení provedeme v AutoCADu.

Křivky můžeme rozdělit do dvou skupin:

- Křivky plošné – evolventa, cykloida, Archimedova spirála atd.
- Křivky prostorové – šroubovice

V deskriptivní geometrii budeme konstruovat křivky geometrickým způsobem.

7.1 Rektifikace kružnice

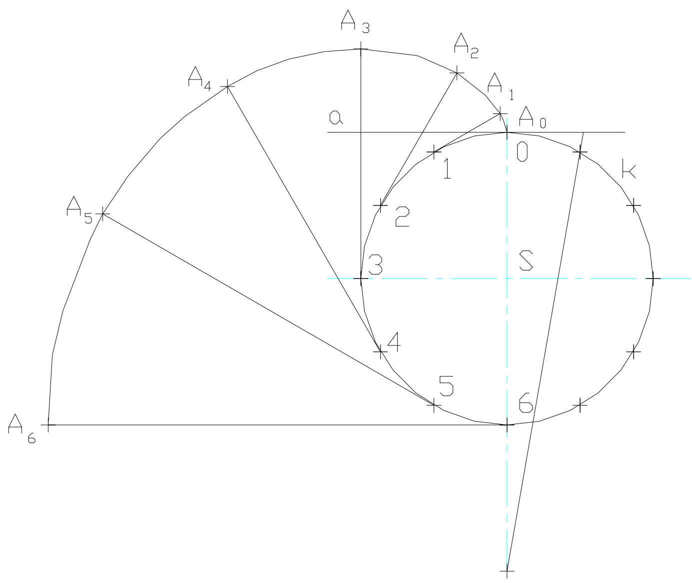


Rektifikace kružnice je její rozvinutí do přímky. Při méně přesných konstrukcích rozvinujeme tím způsobem, že si rozdělíme kružnici alespoň na 12 dílů. Odměříme kružítkem jeden dílek a nanášíme příslušný počet dílků na přímku. Toto rozvinutí není příliš přesné, protože nanášíme tětivu oblouku. Další způsob, méně konstruktivní, je výpočet obvodu kružnice matematickým způsobem a nanesení příslušné délky na přímku.

Konstrukční způsob rozvinutí je **Sobotkova rektifikace kružnice**, kterou budeme při našich konstrukcích křivek používat.

Rektifikaci můžeme použít pouze pro dílek kružnice, kde středový úhel $\beta \leq 30°$, což při dělení na 12 dílů vyhovuje. Chceme rozvinout oblouk AB. Na osu kružnice od bodu A naneseme 3R a dostaneme bod D. Bod D spojíme s bodem B a přímku prodloužíme na tečnu v bodě A. Délka |AC| je délkou oblouku AB. Rektifikace je velmi přesná.

7.2 Evolventa



Definice: Evolventa je křivka, kterou opisuje bod A na přímce a, která se odvaluje po kružnici základní k.

Konstrukce:

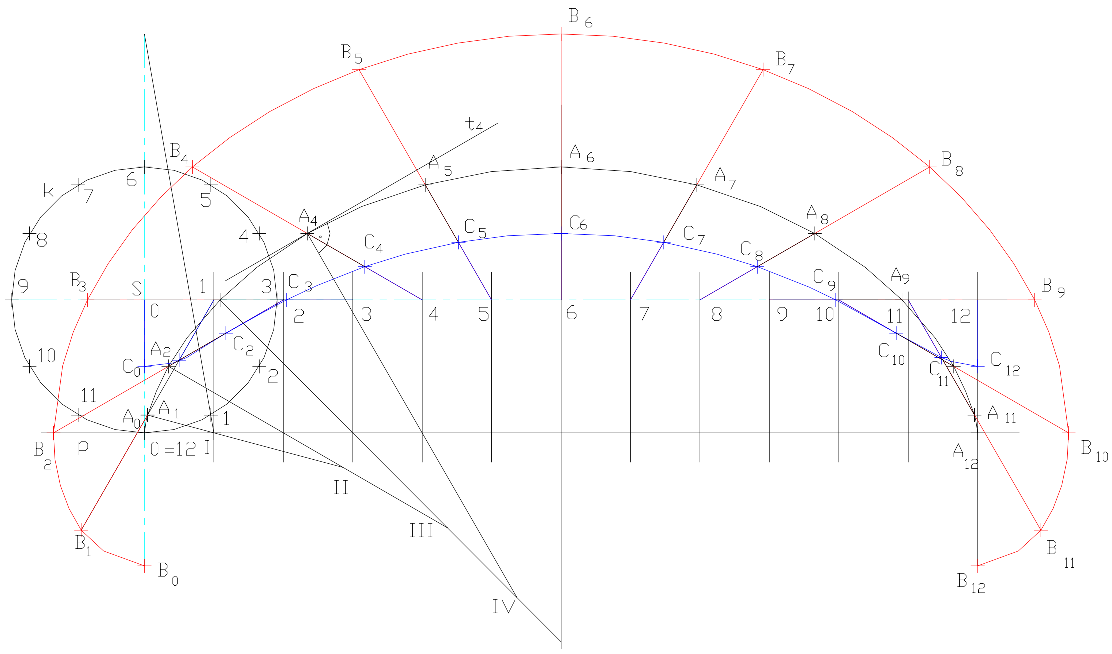
Sestrojení evolventy je poměrně velmi jednoduché a je provedeno na základě definice. Přímka, která se odvaluje po kružnici k je tečnou této kružnice. Při odvalení přímky a do bodu 1 je délka $|1A_1|$ rovna délce oblouku $|1A_0|$. Kružnici k si rozdělíme na určitý počet stejných dílů. Provedeme rektifikaci jednoho dílu. Sestrojíme tečny a na každou tečnu naneseme rektifikovanou část obvodu kružnice, po které se tečna odvalila z počátečního bodu 0. Body A_0 až A_6 jsou body evolventy a pomocí křivítka evolventu nakreslíme.

V technice se využívá evolventa jako křivka boků zubů ozubených kol – začátek evolventy.

7.3 Cykloidy

Definice: Cykloidu opisuje bod, který je vázán na kružnici, která se odvaluje po kružnici, nebo přímce. (Přímku můžeme totiž považovat též za kružnici s nekonečným poloměrem.)

Cykloidy, které vznikají při odvalování kružnice po přímce



Kružnici k v poloze 0, s kterou jsou svázané body opisující cykloidu, označujeme jako **kružnice tvořící.** Přímku p, po které se kružnice tvořící odvaluje, nazýváme **základní přímkou**. Body, které jsou vázány na kružnici, mohou

- ležet na obvodu tvořící kružnice – bod A - vzniká **prostá cykloida**
- ležet vně tvořící kružnice – bod B – vzniká **prodloužená cykloida**
- ležet uvnitř tvořící kružnice – bod C – vzniká **zkrácená cykloida**

.

Konstrukce:

Kružnici tvořící k si rozdělíme na sudý počet dílů a provedeme rektifikaci jednoho dílu. Na svislou osu kružnice naneseme body A_0, B_0, C_0 a vytvoříme si tím průvodič, který budeme otáčet v závislosti na odvalení tvořící kružnice. Na přímku p rozvineme obvod kružnice. Střed se při odvalování po přímce základní posouvá o stejnou vzdálenost jako jsou délky oblouku příslušných dílů. Sestrojíme polohy středů kružnic, které se odvalí o určitý počet dílů – 1 až 12. V těchto bodech sestrojíme polohy průvodiče, které odpovídají jeho natočení. Tím dostaneme jednotlivé body cykloid.

Pro ruční nakreslení **prosté cykloidy** využíváme oskulační kružnice. Normálu k cykloidě sestrojíme spojením bodu cykloidy s bodem na základní přímce, který vznikne nanesením jednotlivých dílů na základní přímku. Získáme též středy kružnic křivosti I – IV atd. Jestliže máme sestrojenou normálu, můžeme sestrojit i tečnu – příklad t_4.

Cykloidy, které vznikají odvalováním kružnice po kružnici

Tvořící kružnici můžeme umístit vzhledem k základní

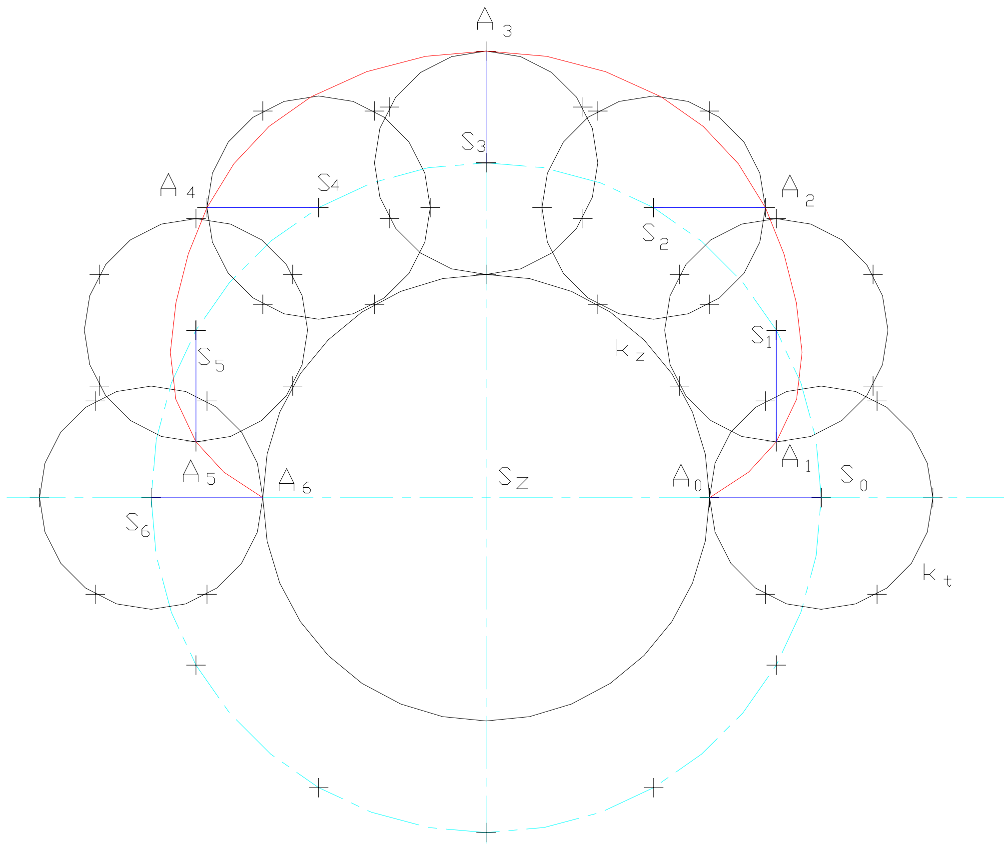
- Vně kružnice – cykloidám říkáme **epicykloidy**. Jestliže průměr kružnice základní a tvořící je stejný, vznikne cykloida, která se – podle tvaru - nazývá **kardioida - srdcovka**. Je-li průměr kružnice tvořící zlomkem kružnice základní – např. polovina, třetina atd., nazýváme tyto epicykloidy **rozetami - růžicemi**.

- Uvnitř kružnice – cykloidám říkáme **hypocykloidy**. Jestliže průměr kružnice tvořící je polovina průměru základní – vzniká **přímka** (bod koná přímočarý pohyb vratný). Je-li průměr kružnice tvořící třetina, čtvrtina atd., vznikají **asteroidy - hvězdice**.
- I zde mohou vznikat epicykloidy a hypocykloidy prosté, zkrácené a prodloužené podle polohy bodu.

Pozn.

V konstrukcích se budeme zabývat pouze cykloidami prostými. Chcete-li nakreslit ostatní typy cykloid, je optimální si zjistit rovnici těchto křivek a naprogramovat si kreslení těchto křivek v AutoLISPu.

Epicykloida



Příklad:

Zkonstruujte jeden list rozety (růžice), kde ∅ k_t je 0,5 ∅k_z.

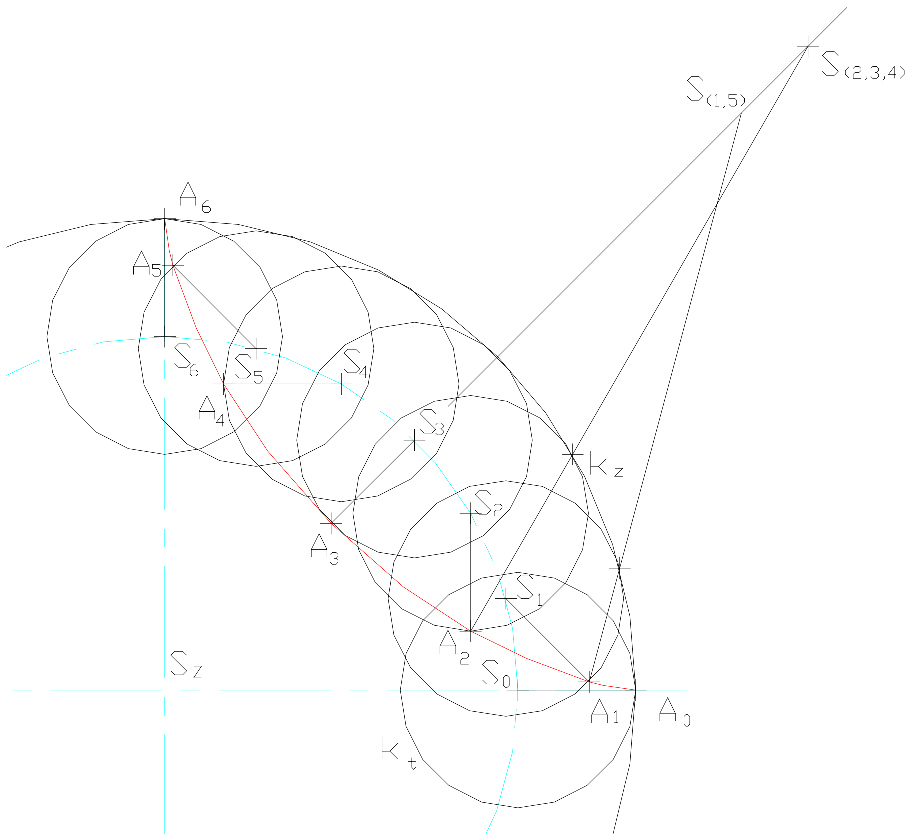
Rozbor:

Jestliže průměr tvořící kružnice je 0.5 průměru základní kružnice, je obvod základní kružnice dvojnásobný. Epicykloida bude proto mít dva „listy“rozety (růžice). Protože se tvořící kružnice odvalí po základní dvakrát, jedna šestina obvodu tvořící kružnice délkově odpovídá jedné dvanáctině obvodu kružnice základní. Střed tvořící kružnice se při odvalování pohybuje po kružnici a délka jednoho dílu je větší než díl na základní kružnici.

Konstrukce:

Rozdělíme kružnici základní na dvanáct dílu a tvořící na šest. Sestrojíme polohu středů tvořící kružnice a sestrojíme ve středech S_0 až S_6 tvořící kružnice s příslušně otočeným průvodičem, na kterém leží bod opisující epicykloidu.

Hypocykloida



Příklad :
Sestrojte jednu část asteroidy (hvězdice), kde ∅ k_t je 0,25 ∅k_z.

Rozbor:
Při tomto zadání asteroida má čtyři vrcholy, protože obvod k_z je oproti k_t čtyřnásobný. Jestliže se k_t odvalí po k_z čtyřikrát, jedna šestina obvodu k_t odpovídá délkově jedné čtyřiadvacetině k_z. Střed k_t se při odvalování pohybuje po kružnici, kde délka jednoho dílu je menší než díl na kružnici k_z.

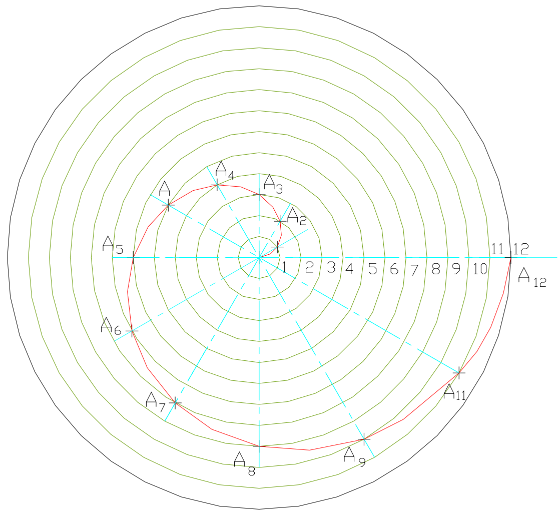
Konstrukce:
Při konstrukci postupujeme obdobně – mimo dělení kružnic – jako v předchozích příkladech. Asteroida se při ručním kreslení velmi dobře nahrazuje kruhovými oblouky.
Konstrukce středů oskulačních kružnic – vedeme přímku bodem cykloidy (např. A_1) a bodem, kde se k_t v poloze S_1 dotýká k_z. Na ose souměrnosti asteroidy tato přímka určí střed oskulační kružnice. Pro ruční kreslení je toto nahrazení poměrně přesné a značně zjednodušuje nakreslení křivky.

Využití cykloid

Cykloidy se používají při konstrukci boků zubů ozubených kol malých průměrů – hodinové strojky.

7.4 Archimédova spirála

Definice:
Archimédova spirála vzniká otáčením průvodiče, na kterém se rovnoměrně pohybuje bod.



Základní pojmy:

Posuv bodu při otočení průvodiče o určitý úhel nazýváme **parametrem** spirály. Zapisujeme např. **a=10,** α_a**=30°.** Parametr můžeme vztáhnout i na jiný úhel – např. na 360°.

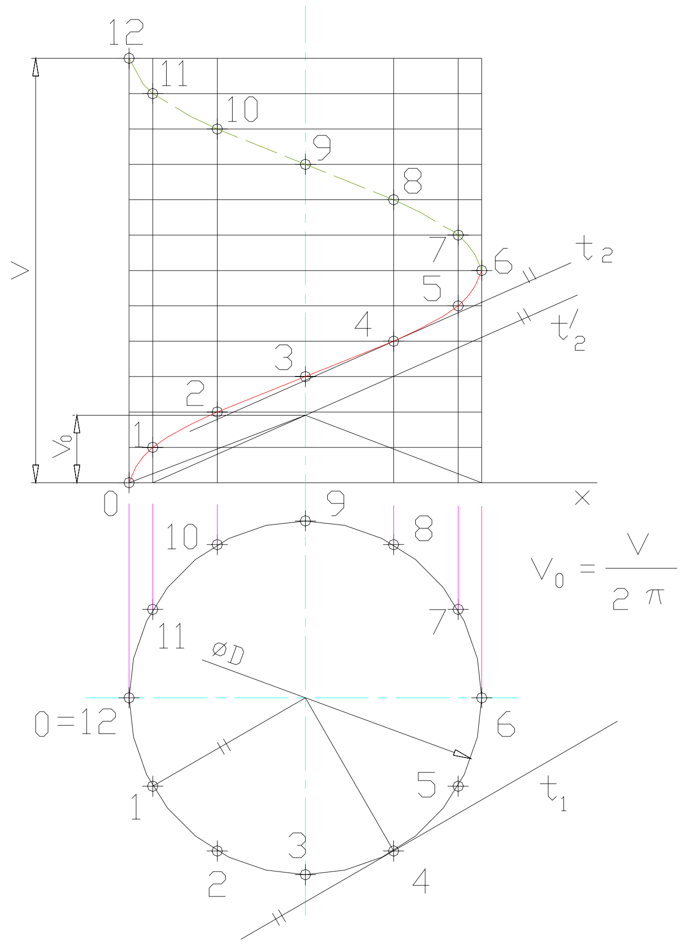
Konstrukce:

Rozdělíme si úhel 2π na určitý počet dílů – volíme vhodně podle zadaného parametru. Nakreslíme jednotlivé průvodiče a naneseme příslušné posunutí bodu od počátku v závislosti na úhlu natočení průvodiče. Spirála nemusí nutně začínat v počátku.

Využití Archimédovy spirály:

Spirála se využívala již ve starověku ke konstrukci jednoduchých čerpadel (ta se donedávna používala k zavlažování polí v Egyptě). V současné době se využívá ke konstrukci oběžných kol čerpadel, lopatek turbin a vaček, které převádí pohyb rotační na rovnoměrný přímočarý.

8 Prostorové křivky - šroubovice



Šroubovice je nejjednodušší prostorová křivka v technice velmi často využívaná.

Definice:

Šroubovici opisuje bod, který se rovnoměrně otáčí okolo osy a zároveň posouvá rovnoměrně ve směru osy.

Šroubovice mohou být:

- podle způsobu otáčení pravotočivé a levotočivé – podle směru otáčení bodu a stoupání šroubovice (na obrázku pravotočivá, bod se otá-čí a stoupá doprava).
- podle způsobu rotace - navinuty na válci, kuželu a dalších rotačních plochách.

Konstrukce šroubovice navinuté na válci:

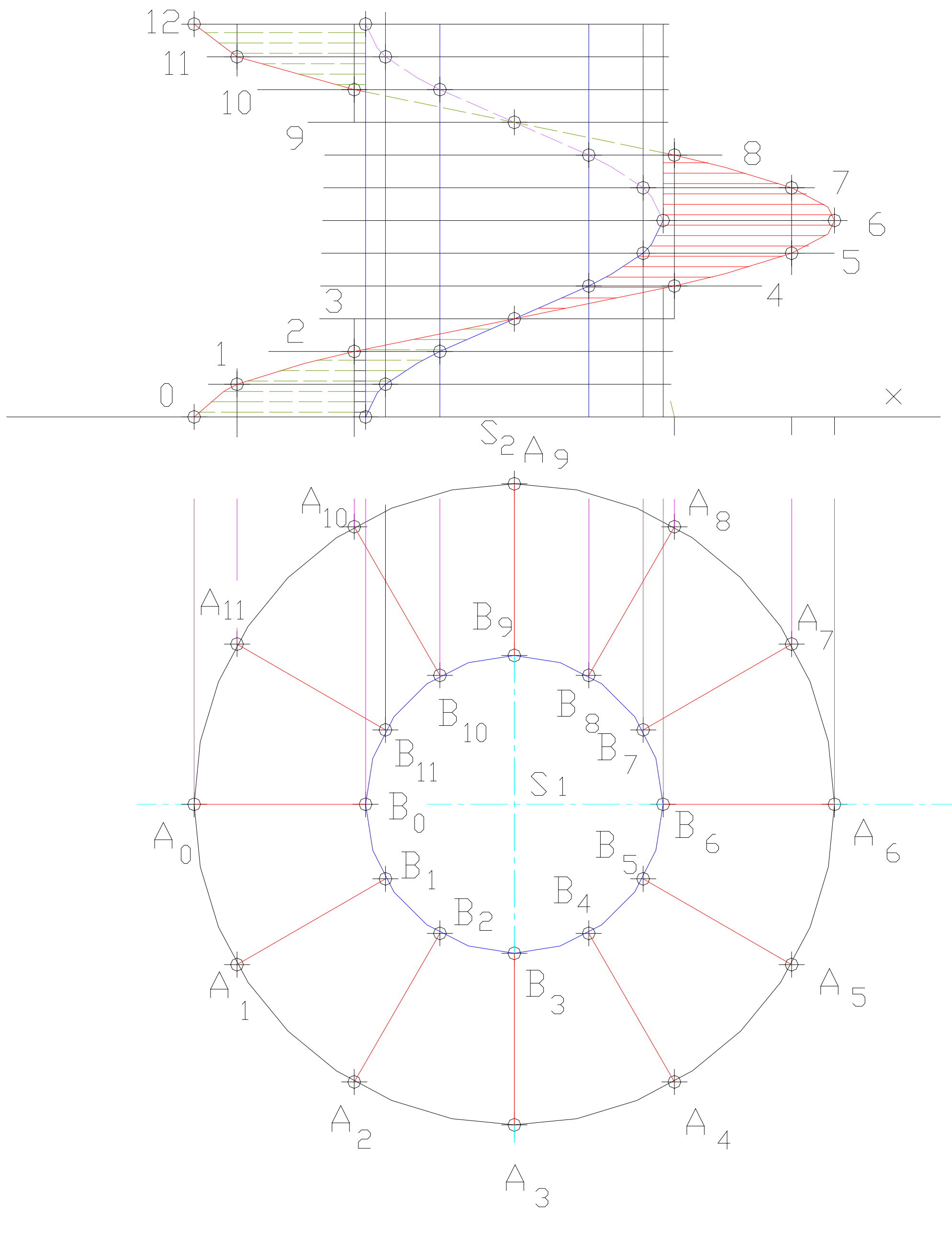
Sestrojíme válec – prvý a druhý průmět, na kterém je šroubovice navinuta. Podstavu válce rozdělíme na vhodný sudý počet dílů (pro souměrné rozdělení). Tyto díly, jako povrchové přímky, přeneseme na druhý průmět válce. U šroubovice je zadáno stoupání na jeden závit – V. Vypočítáme stoupání na jeden díl a na povrchové přímky stoupání naneseme.

Konstrukci lze provádět i pomocí takzvaného základního tvořícího trojúhelníku, který je pravoúhlý.
Je zadán rozvinutou podstavou a stoupáním. V trojúhelníku vidíme i úhel stoupání šroubovice. Jestliže jsme při rozvinutí podstavy využili díly, můžeme přenášet příslušné výšky stoupání na povrchové přímky bez výpočtu. Konstrukce je geometricky čistější, ale prostorově náročnější. Proto je prvý způsob výhodnější.

Úhel stoupání šroubovice α můžeme vypočítat ze vztahu $\operatorname{tg}\alpha = V/\,\pi\, D$.

Potřebujeme zkonstruovat též tečnu ke šroubovici. V prvém průmětu není konstrukce v jednotlivých bodech šroubovice obtížná. V druhém průmětu musíme využít tzv. charakteristického kužele o výšce V0, vzorec pro výpočet v obrázku. Povrchová přímka na kuželu, která je rovnoběžná s tečnou v prvém průmětu, je rovnoběžná i v druhém průmětu.

8.1 Šroubová plocha



Šroubová plocha vzniká rotací přímky, křivky atd. okolo osy a posunem ve směru osy.

Na příkladu šroubové plochy byla použita k rotaci a posunu úsečka AB. Konstrukce šroubové plochy provedeme konstrukcí šroubovice bodu A, šroubovice bodu B a nakreslením poloh natočených úseček. Z hlediska viditelnosti si je nutné uvědomit, že šroubovou plochu v levé části nárysu vidíme zdola (vyšrafováno čárkovaně), šroubovou plochu v pravé části průmětu shora (šrafy nepřerušované).

Šroubová plocha je navinuta na válec, na jehož obvodě je bod B, a proto část šroubové plochy není vidět (nešrafována).

Využití:

Přímkovou šroubovou plochu znázorněného typu používáme pro šnekové dopravníky, znázornění točitých schodů ve stavebnictví. Jestliže bychom použili k vytvoření trojúhelník, znázornili bychom závit, kružnici – šroubovou pružinu atd.

Použitá literatura:

[1] Leinveber, J. a kol. : Technické kreslení pro SPŠ strojnické. 1 vydání Praha, SNTL 1984. 230 s.
[2] Švercl, J. –Vávra, J.: Technické kreslení II. 3 vydání Praha, SNTL 1981. 193 s.
[3] Kounovský, J. – Vyčichlo, F. : Deskriptivní geometrie. 4 vydání Praha, Nakladatelství Československé akademie věd 1959. 547 s.

Obsah: